Computación, información y física cuántica en el espacio qang

Un tratado sobre la unidad qg, el filtro de simetría y sus aplicaciones

Vicente Humberto Monteverde

2026-01-01

Tabla de contenidos

Prefacio **17**
Cómo leer los resultados . . . 17
Código y datos . . . 18
Estado de esta edición . . . 18

I I. Fundamentos: la métrica angular-probabilística (la unidad qang) **19**

1 La unidad qang: definición, mili-qang y la ecuación de probabilidad **20**
1.1 Definición del qang . . . 20
1.2 Teoría del mili-qang . . . 22
1.2.1 Definición y escala . . . 22
1.2.2 Lineal en la probabilidad, no lineal en el ángulo . . . 22
1.2.3 Resolución por disparos . . . 23
1.2.4 Presupuesto de error de compuerta . . . 25
1.3 La ecuación de probabilidad del qang y del mili-qang . . . 26
1.3.1 Más de dos resultados: la distancia estadística . . . 27
1.4 La escala angular: el qang angular (qga) . . . 27
1.4.1 Propuesta sin verificar: energía y antimateria en qga . . . 29
1.5 Por qué medir en qg: la brecha geometría–probabilidad . . . 31
1.6 Inversión y el signo de rama . . . 31
1.7 La entropía del resultado: qg_S . . . 32
1.8 Invertibilidad de qg_S y sus barras de error . . . 32
1.9 El ángulo qang como transformación arcoseno . . . 33
1.10 Estados mixtos y registros de varios qubits . . . 33
1.11 Magnitudes derivadas de la lectura . . . 34
1.12 Alcance y límites de la base . . . 37
1.13 Sin qang y con qang . . . 39
1.14 En código . . . 41
1.15 Resumen . . . 41
Notas bibliográficas . . . 42

2 Compuertas nativas, álgebra cerrada y el operador universal **43**
2.1 La compuerta elemental R_{qg} . . . 43

2.2 El operador universal en qg . . . 44
2.3 La compuerta como ecuación de probabilidad . . . 45
2.4 Verificación contra las bibliotecas estándar . . . 46
2.5 Más allá del qubit: la subálgebra de Cartan . . . 46
2.6 El principio de área de pulso mínima . . . 47
2.7 Pantalla de exposición antes de correr . . . 49
2.8 Un único orden de qubits para todos los kits . . . 50
2.9 Sin qang y con qang . . . 50
2.10 En código . . . 51
2.11 Resumen . . . 52
Notas bibliográficas . . . 52

3 Reflexiones, Householder y la dinámica de Grover 53
3.1 Matrices de transición sin funciones trascendentes . . . 53
3.2 El reflector de Householder en espacio qg . . . 54
3.3 El difusor de Grover como reflexión qg . . . 54
3.4 Probabilidad de transición entre estados qg . . . 55
3.5 La trayectoria de Grover como polinomio de Chebyshev . . . 56
3.5.1 La trayectoria como oscilación armónica . . . 58
3.6 Límites analíticos: ángulo grueso y sobreoscilación . . . 58
3.6.1 Señal a ruido y curvatura a lo largo de la trayectoria . . . 59
3.6.2 Grover con ruido . . . 60
3.7 Estimación de amplitud . . . 60
3.8 Sin qang y con qang . . . 61
3.9 En código . . . 62
3.10 Resumen . . . 63
Notas bibliográficas . . . 63

4 Estadística de muestreo, inferencia bayesiana y la distribución de Haar 64
4.1 Propagación del ruido de disparo . . . 64
4.1.1 La fase azimutal . . . 65
4.2 La distribución de Haar en espacio qg . . . 65
4.3 Intervalos exactos cerca de los polos . . . 66
4.4 Estimadores insesgados de segundo orden . . . 67
4.5 Planificar los disparos . . . 68
4.6 Tomografía con pocos disparos y sombras clásicas . . . 69
4.7 El fundamento: Riesz–Fréchet . . . 70
4.8 Las magnitudes derivadas en el muestreo . . . 71
4.9 Sin qang y con qang . . . 72
4.10 En código . . . 73
4.11 Resumen . . . 73
Notas bibliográficas . . . 74

II II. Geometría local, óptica cuántica y fases geométricas 75

5 El radio local de Bloch como medida de pureza y entrelazamiento 76
5.1 La ecuación de probabilidad con radio . . . 76
5.2 El déficit como medida de entrelazamiento . . . 77
5.3 El radio ante las compuertas y los algoritmos . . . 77
5.4 Peso definido: el radio desde la base Z . . . 78
5.5 Dirección y radio por separado . . . 80
5.6 Dualidad onda–partícula e incertidumbre entrópica . . . 81
5.7 Estimar el radio con disparos . . . 83
5.8 Sin qang y con qang . . . 83
5.9 En código . . . 84
5.10 Resumen . . . 84
Notas bibliográficas . . . 85

6 Polarización óptica y parámetros de Stokes en unidades qg 86
6.1 La ley de Malus como ecuación de probabilidad . . . 86
6.2 Los parámetros de Stokes son valores qg . . . 88
6.3 Grado de polarización y pureza . . . 89
6.4 Elementos sin pérdidas: la matriz de Mueller es la regla de compuertas 90
6.5 Polarimetría por conteo de fotones . . . 90
6.6 Sin qang y con qang . . . 91
6.7 En código . . . 92
6.8 Resumen . . . 93
Notas bibliográficas . . . 93

7 Fases geométricas y el teorema de Stokes en la esfera 94
7.1 La conexión y la curvatura de Berry . . . 94
7.2 Stokes en la esfera . . . 94
7.3 Bucles a altura constante: la fase es la probabilidad . . . 95
7.4 Tres cálculos independientes . . . 96
7.5 Medir la fase: el interferómetro y la ecuación de probabilidad . . . 96
7.6 La fase de Pancharatnam y el octante . . . 98
7.7 Sin qang y con qang . . . 98
7.8 En código . . . 99
7.9 Resumen . . . 99
Notas bibliográficas . . . 100

8 Información de Fisher, relojes, gravedad y metrología 101
8.1 Desde la base: la información de un disparo . . . 101
8.2 Geometría de la información y el gradiente natural . . . 103
8.3 Dos relojes y la gravedad . . . 103
8.4 Sensado Ramsey: dónde operar . . . 105

8.5 Metrología GHZ: cuándo el entrelazamiento gana . . . 106
8.6 Estados térmicos: $qg_Z = \tanh(\beta h)$ . . . 108
8.7 Sin qang y con qang . . . 108
8.8 En código . . . 109
8.9 Resumen . . . 110
Notas bibliográficas . . . 110

III III. Física de neutrinos, oscilaciones y simulación cuántica (`qang.neutrino`) 111

9 Cinemática cuántica de la oscilación de sabor en el vacío 112
9.1 Desde la base: la probabilidad de oscilación en m-qg . . . 112
9.2 La oscilación como rotación sobre un cono . . . 113
9.3 El ángulo de mezcla es un cuarto del ángulo qang . . . 114
9.4 Barras de error que no dependen del ángulo . . . 114
9.5 Tres sabores en tres qubits . . . 115
9.6 Supresión del ruido con el filtro qg . . . 115
9.7 La asimetría CP en el vacío . . . 119
9.8 Qué es y qué no es el vínculo entre neutrinos y qang . . . 119
9.9 Sin qang y con qang . . . 120
9.10 En código . . . 121
9.11 Resumen . . . 121
Notas bibliográficas . . . 121

10 Efectos de materia, neutrinos solares y oscilaciones colectivas 123
10.1 Desde la base: el medio como corrimiento en m-qg . . . 123
10.2 El efecto MSW en la Tierra . . . 124
10.3 El ordenamiento de masas leído a través de la materia . . . 125
10.4 Neutrinos solares: el Sol entero es una sola rotación . . . 126
10.5 Oscilaciones colectivas: lo que se conserva es el número de masa . . . 128
10.6 Sin qang y con qang . . . 129
10.7 En código . . . 130
10.8 Resumen . . . 130
Notas bibliográficas . . . 131

11 Fases de Majorana, doble beta sin neutrinos y neutrinos estériles 132
11.1 Desde la base: lo que no cambia una probabilidad no cambia una lectura . . . 132
11.2 Las fases de Majorana son invisibles para las oscilaciones . . . 132
11.3 Las fases de Majorana en la doble beta sin neutrinos . . . 133
11.4 El neutrino estéril: un cuarto qubit en el sector de peso 1 . . . 135
11.5 Los cuatro números cuánticos en términos qg . . . 137

11.6 Sin qang y con qang . . . 139
11.7 En código . . . 140
11.8 Resumen . . . 140
Notas bibliográficas . . . 140

IV IV. Teleportación cuántica en redes ópticas y distribución de entrelazamiento (`qang.qpon`) 142

12 Teleportación óptica y el límite del par de Bell 143
12.1 Desde la base: la fidelidad es una probabilidad . . . 143
12.2 Teleportación con un par de Bell . . . 144
12.3 Un canal que pierde fotones . . . 144
12.4 La regla de diseño . . . 144
12.5 La regla en dispositivos simulados . . . 146
12.6 Pares de Bell en una red, leídos en qg . . . 148
12.7 Sin qang y con qang . . . 149
12.8 En código . . . 150
12.9 Resumen . . . 151
Notas bibliográficas . . . 151

13 Doble carril, filtro de sector y fidelidad a larga distancia 152
13.1 Desde la base: tres lecturas qg predicen una fidelidad . . . 152
13.2 La fidelidad desde tres correladores . . . 153
13.3 Doble carril: cada pérdida se anuncia . . . 154
13.4 Lo que mide el doble carril en dispositivos simulados . . . 154
13.5 Intercambio de entrelazamiento en cadena . . . 155
13.6 Lo que queda pendiente . . . 158
13.7 Sin qang y con qang . . . 158
13.8 En código . . . 159
13.9 Resumen . . . 159
Notas bibliográficas . . . 160

V V. Relatividad, bucles temporales y evaporación de agujeros negros (`qang.postselection`) 161

14 Curvas temporales cerradas posseleccionadas (P-CTC) y resolución de paradojas 162
14.1 Desde la base: la probabilidad de éxito tiene ángulo qang φ . . . 162
14.2 Dos maneras de cerrar un bucle temporal . . . 162
14.3 La ley de éxito y la paradoja del abuelo . . . 163
14.4 La rotación controlada por el sistema . . . 164

14.5 Lo que una lectura qg distingue entre D-CTC y P-CTC 165
14.6 El costo de la posselección 167
14.7 Lo que queda pendiente 167
14.8 Sin qang y con qang 168
14.9 En código 169
14.10 Resumen 169
Notas bibliográficas 169

15 Termodinámica de agujeros negros, caos cuántico y el decodificador de Yoshida–Kitaev 170
15.1 Desde la base: éxito 1/4 y el ecuador de la fidelidad 170
15.2 La paradoja de la información y la complementariedad 170
15.3 Scrambling: un micro-agujero negro de 3 qubits 171
15.4 El protocolo de Hayden–Preskill y el decodificador 171
15.5 La ley exacta $P \cdot F = 1/4$ 172
15.6 En modelos de ruido simulados 172
15.7 Agujeros negros más grandes 173
15.8 La curva de Page en juguete 175
15.9 Agujeros de gusano atravesables 176
15.10 Lo que queda pendiente 177
15.11 Sin qang y con qang 177
15.12 En código 179
15.13 Resumen 179
Notas bibliográficas 179

VI VI. Ciberseguridad cuántica, generación aleatoria y fronteras post-cuánticas 181

16 Demarcación: criptografía cuántica frente a criptografía post-cuántica (PQC) 182
16.1 Desde la base: qué probabilidades hay a cada lado 182
16.2 La naturaleza de la PQC 183
16.3 La falla de descifrado se cuenta, no se mide en un qubit 183
16.4 El vector de ataque cuántico: Grover 185
16.5 El vector de ataque cuántico: Shor y la estimación de fase 186
16.6 La demarcación 187
16.7 Lo que queda pendiente 188
16.8 Sin qang y con qang 188
16.9 En código 189
16.10 Resumen 189
Notas bibliográficas 190

17 Distribución cuántica de claves (QKD) y BB84 en espacio qg **191**
17.1 Desde la base: cuatro lecturas y la imagen de la esfera 191
17.2 El monitor: deriva o espía 193
17.3 Bloques finitos 195
17.4 Más allá de interceptar y reenviar 196
17.5 En el simulador ruidoso de IonQ 200
17.6 Lo que queda pendiente 201
17.7 Sin qang y con qang 202
17.8 En código 203
17.9 Resumen 203
Notas bibliográficas 204

18 Números aleatorios certificados (QRNG) y auditoría de canales **205**
18.1 Desde la base: la salida y la privacidad son lecturas distintas 205
18.2 El análisis por sesgo de salida falla; la lectura qg no 206
18.3 Junto al polo la certificación pide disparos 208
18.4 La calibración de lectura: temperatura o error del detector 209
18.5 En el simulador ruidoso de IonQ, con una fuga 210
18.6 Lo que queda pendiente 212
18.7 Sin qang y con qang 212
18.8 En código 214
18.9 Resumen 214
Notas bibliográficas 215

19 Baterías cuánticas y redes **216**
19.1 Desde la base: tres distancias entre lecturas 216
19.2 Almacenar con T1 y T2: la inversión muere en el ecuador 217
19.3 Certificar la carga con disparos 218
19.4 Registros: la carga bloqueada en las correlaciones 220
19.5 Redes: un par de Bell guardado en dos memorias 221
19.6 Lo que queda pendiente 224
19.7 Sin qang y con qang 224
19.8 En código 226
19.9 Resumen 226
Notas bibliográficas 226

VII VII. Aprendizaje automático cuántico (QML) y el filtro de simetría **228**

20 Redes neuronales cuánticas que conservan el peso (WeightQNN) **229**
20.1 Desde la base: un sector y sus lecturas 229
20.2 Arquitecturas y codificaciones 230
20.3 Lecturas: qg_Z, qg_{ZZ} y dos canales 232

20.4 Simulabilidad clásica: no hay ventaja cuántica . . . 233
20.5 Escala y multiclase . . . 233
20.6 Entrenar con ruido o con el filtro . . . 234
20.7 El ecosistema: Qiskit, qiskit-machine-learning y PennyLane . . . 235
20.8 La codificación qg y el procesamiento cuántico de señales . . . 235
20.9 Lo que queda pendiente . . . 236
20.10 Sin qang y con qang . . . 236
20.11 En código . . . 237
20.12 Resumen . . . 238
Notas bibliográficas . . . 238

21 El filtro de simetría qg y la exactitud bajo relajación T1 239
21.1 Desde la base: el decaimiento empuja las lecturas al polo norte . . . 239
21.2 Lo que cuesta: la regla del error cuadrático medio . . . 240
21.3 Entrenar a través del filtro . . . 241
21.4 F5: el T1 desigual depende sólo de los cocientes . . . 243
21.5 F6: el desfase, con el filtro y extrapolación . . . 244
21.6 Errores de compuerta y de lectura . . . 245
21.7 Lo que queda pendiente . . . 246
21.8 Sin qang y con qang . . . 246
21.9 En código . . . 247
21.10 Resumen . . . 247
Notas bibliográficas . . . 248

22 Calibración por eco y el sesgo de ruido (pull effect) 249
22.1 Desde la base: dos errores que el filtro trata distinto . . . 249
22.2 Errores dentro del sector y el eco . . . 250
22.3 ¿Llega al clasificador? . . . 250
22.4 El arrastre: por qué la pérdida sin qang varía entre semillas . . . 251
22.5 La lectura sin arrastre . . . 253
22.6 Calibrar con el propio dispositivo . . . 254
22.7 Lo que queda pendiente . . . 254
22.8 Sin qang y con qang . . . 255
22.9 En código . . . 256
22.10 Resumen . . . 256
Notas bibliográficas . . . 256

23 Geometría de la información, gradiente natural (QNG) y núcleos 258
23.1 Desde la base: el ángulo y la lectura . . . 258
23.2 La singularidad y sus regularizaciones . . . 258
23.3 El ángulo es la coordenada plana de Fisher . . . 259
23.4 El gradiente natural y la métrica qg_YY . . . 260
23.5 El descenso amortiguado en los polos . . . 262

23.6 Núcleos cuánticos y el filtro qg . . . 263
23.7 Mesetas estériles: costo global contra costo local qg . . . 264
23.8 Tres mesetas y lo que qang hace con cada una . . . 265
23.9 Lo que queda pendiente . . . 269
23.10 Sin qang y con qang . . . 269
23.11 En código . . . 271
23.12 Resumen . . . 271
Notas bibliográficas . . . 272

VIIIVIII. Dinámica de muchos cuerpos, canales abiertos, materia y química 273

24 Simulación hamiltoniana, caminatas cuánticas y VarQTE 274
24.1 Desde la base: conservar N es tener un filtro . . . 274
24.2 Trotter y la caminata cuántica en la cadena XY . . . 274
24.3 Varias excitaciones: la cadena XXZ . . . 275
24.4 Los canales como mapas afines de las lecturas . . . 277
24.5 Evolución variacional a profundidad fija . . . 277
24.6 Ecuaciones diferenciales . . . 278
24.7 Hubbard y una teoría de gauge: filtros de simetría en todos los observables . . . 278
24.8 Coherencia en el Ising de campo transversal . . . 279
24.9 Máquinas de Boltzmann: el plano I–η . . . 280
24.10 Lo que queda pendiente . . . 280
24.11 Sin qang y con qang . . . 281
24.12 En código . . . 282
24.13 Resumen . . . 282
Notas bibliográficas . . . 283

25 Espectroscopía cuántica, PCA y química molecular 284
25.1 Desde la base: contar electrones con la lectura del registro . . . 284
25.2 PCA en el sector de peso 1 . . . 285
25.3 H_2: el testigo y el filtro . . . 285
25.4 Por qué el filtro ayuda a H_2 y no a LiH . . . 286
25.5 Verificaciones que alcanzan todos los grupos . . . 287
25.6 Solapamientos: test de inversión contra swap test . . . 288
25.7 Optimización con restricciones: QAOA con “exactamente K” . . . 289
25.8 Lo que queda pendiente . . . 289
25.9 Sin qang y con qang . . . 290
25.10 En código . . . 291
25.11 Resumen . . . 291
Notas bibliográficas . . . 292

IX IX. Corrección de errores, síndromes continuos y caracterización 293

26 Corrección de errores y síndromes continuos 294
26.1 Desde la base: el síndrome es una lectura qg . . . 294
26.2 Qué código conviene bajo T1 y desfase . . . 294
26.3 El síndrome como testigo continuo . . . 295
26.4 El código de superficie y el decodificador consciente del T1 . . . 296
26.5 Qutrits y qubits de borrado . . . 297
26.6 Cortar circuitos: dónde y a qué costo . . . 298
26.7 Benchmarking aleatorizado, ZNE y qg_S como señal . . . 299
26.8 Lo que queda pendiente . . . 300
26.9 Sin qang y con qang . . . 300
26.10 En código . . . 301
26.11 Resumen . . . 302
Notas bibliográficas . . . 302

27 Caracterización de hardware en qg 303
27.1 Desde la base: un qubit en reposo es una lectura . . . 303
27.2 T1, T2, temperatura y lectura en un solo barrido . . . 303
27.3 ¿Qué ruido es? La lectura media contra XEB y HOP . . . 305
27.4 Errores coherentes y el ZZ siempre encendido . . . 306
27.5 Cuantización del control: grilla pareja en el ángulo o en qg . . . 306
27.6 Lo que queda pendiente . . . 307
27.7 Sin qang y con qang . . . 308
27.8 En código . . . 309
27.9 Resumen . . . 309
Notas bibliográficas . . . 309

X X. Evidencia experimental, hardware real y auditoría de falsación 310

28 Metodología: el protocolo de falsación pre-registrada 311
28.1 Desde la base: una predicción es una lectura que se puede equivocar 311
28.2 Dos maneras de fijar una predicción . . . 311
28.3 Balance de aciertos y fallos . . . 312
28.4 Auditoría de la anterioridad . . . 312
28.5 Bancos de prueba . . . 313
28.6 Hardware real . . . 314
28.7 Sin qang y con qang . . . 315
28.8 En código . . . 316
28.9 Resumen . . . 316
Notas bibliográficas . . . 316

29 Las ventajas empíricas confirmadas **317**
29.1 Desde la base: de dónde vienen las ventajas . . . 317
29.2 Restauración exacta bajo T1 . . . 317
29.3 Menos error en las lecturas de dispositivos simulados . . . 318
29.4 Errores dentro del sector: el eco . . . 319
29.5 Caracterización y control . . . 319
29.6 Neutrinos: mitigación sin circuitos extra . . . 321
29.7 BB84: menos falsas alarmas ante la deriva térmica . . . 321
29.8 Lo que queda pendiente . . . 322
29.9 Sin qang y con qang . . . 322
29.10 En código . . . 324
29.11 Resumen . . . 324
Notas bibliográficas . . . 324

30 Límites estructurales, equivalencias y resultados negativos **325**
30.1 Desde la base: qué no puede ver la escala . . . 325
30.2 Estados de grafo: entrelazamiento invisible en Z . . . 325
30.3 qg_S no es monótona bajo T1 . . . 326
30.4 La equivalencia del gradiente natural . . . 326
30.5 El filtro no alcanza los circuitos profundos . . . 327
30.6 La red de peso 1 es clásica . . . 328
30.7 Dónde el filtro no se aplica: fases y cifrado clásico . . . 329
30.8 Las predicciones falladas de §157–§164 . . . 330
30.9 Lista consolidada de limitaciones . . . 330
30.10 Sin qang y con qang . . . 332
30.11 En código . . . 332
30.12 Resumen . . . 333
Notas bibliográficas . . . 333

31 Primer experimento en hardware real: IQM Resonance **334**
31.1 Desde la base: qué se lleva al chip . . . 334
31.2 Por qué IQM, y qué cuesta compilar . . . 334
31.3 El módulo `qang.iqm` . . . 335
31.4 Ensayo gratis antes de gastar . . . 336
31.5 El presupuesto: lo planeado y lo gastado . . . 336
31.6 El experimento principal: neutrinos de tres sabores . . . 337
31.7 Lo que vino después, y lo que queda . . . 339
31.8 Resultado: aciertos, fallos y comparación con la simulación . . . 339
31.9 Sin qang y con qang . . . 340
31.10 En código . . . 340
31.11 Resumen . . . 341
Notas bibliográficas . . . 341

32 Arquitectura de software, ecosistema multi-SDK y ejecución física **342**
32.1 Desde la base: una cuenta, muchos caminos . . . 342
32.2 Un solo orden de qubits . . . 342
32.3 Primitivas V2 y observables filtrados . . . 343
32.4 Compilar pensando en el sector . . . 343
32.5 El ZZ estático: se simula, no se mitiga . . . 344
32.6 ZNE con el filtro y planificación de disparos . . . 345
32.7 Directrices por tipo de hardware . . . 346
32.8 Sin qang y con qang . . . 347
32.9 En código . . . 348
32.10 Resumen . . . 348
Notas bibliográficas . . . 349

XI XI. Nanocuántica **350**

33 Nanocuántica: transmisión, ruido de partición y qubits a escala nanométrica **351**
33.1 Desde la base: una probabilidad por experimento . . . 351
33.2 La transmisión por túnel como probabilidad qang . . . 352
33.3 La fórmula de Landauer: un canal, una lectura . . . 352
33.4 Ruido de partición: la varianza binomial, estabilizada . . . 353
33.5 Bloqueo de Coulomb: la ocupación de un nivel . . . 354
33.6 Qubits de carga y de espín en puntos cuánticos . . . 356
33.7 Centros NV: el contraste como presupuesto de m-qg . . . 356
33.8 Sin qang y con qang . . . 357
33.9 En código . . . 358
33.10 Resumen . . . 358
Notas bibliográficas . . . 358

XII XII. Aplicaciones transversales **360**

34 Arquitectura angular: química, materia condensada, óptica relativista, termodinámica y geometría **361**
34.1 Desde la base: lecturas, no ciclos . . . 361
34.2 Química cuántica . . . 362
34.2.1 Jordan–Wigner: el signo del intercambio es una lectura . . . 362
34.2.2 UCC para H_2: la amplitud es medio ángulo qang . . . 362
34.2.3 Larmor y el eco de Hahn . . . 363
34.3 Materia condensada . . . 364
34.3.1 Ising con campo transverso: el pico se corre con el tamaño . . . 364

34.3.2 Cadena de Kitaev: la protección está en el hamiltoniano, no en el ángulo . . . 364
34.3.3 Aharonov–Bohm: una franja por cuanto de flujo . . . 365
34.4 Relatividad y óptica . . . 366
34.4.1 Rotación de Wigner . . . 366
34.4.2 Fresnel: Brewster es un cero de probabilidad, la reflexión total es una fase . . . 367
34.4.3 Bogoliubov y Unruh: el medio ángulo es la gudermanniana . . . 367
34.5 Termodinámica y metrología . . . 368
34.5.1 Jarzynski con dos mediciones . . . 368
34.5.2 Información de Fisher de un estado GHZ . . . 368
34.6 Geometría y caos . . . 369
34.6.1 Fubini–Study: polo a polo, la mitad del ángulo qang . . . 369
34.6.2 OTOC: integrable contra caótico . . . 369
34.7 La matriz de casos, revisada . . . 370
34.8 Sin qang y con qang . . . 371
34.9 En código . . . 372
34.10 Resumen . . . 373
Notas bibliográficas . . . 373

XIIIXIII. Ecosistema: qang dentro de otras librerías **375**

35 qang como módulo: modificaciones a las librerías cuánticas y de aprendizaje **376**
35.1 Desde la base: qué lleva cada librería . . . 376
35.2 Cómo está hecho . . . 377
35.3 Mitigación: mitiq . . . 377
35.4 Calibración: qiskit-experiments . . . 378
35.5 Sistemas abiertos: QuTiP . . . 379
35.6 Corrección de errores: Stim . . . 379
35.7 Aprendizaje: scikit-learn, JAX y PyTorch . . . 380
35.8 Pulsos: Qiskit Dynamics . . . 380
35.9 SDKs: Qibo, pytket, Braket y CUDA-Q . . . 380
35.10 Lo que se propone a cada proyecto . . . 381
35.11 Conflictos de entorno . . . 382
35.12 Sin qang y con qang . . . 382
35.13 En código . . . 384
35.14 Resumen . . . 384
Notas bibliográficas . . . 384

Bibliografía **386**

Apéndices **405**

A Catálogo de las 15 compuertas fundamentales en representación qg **405**
A.1 Compuertas fijas de un qubit 405
A.2 Compuertas paramétricas 406
A.3 Compuertas de varios qubits 407

B Fórmulas de transición, matrices de Gell-Mann y polinomios de Chebyshev **409**
B.1 Fórmulas de un qubit 409
B.2 Matrices de Gell-Mann diagonales 410
B.3 Polinomios de Chebyshev y la trayectoria de Grover 411
Notas bibliográficas 412

C Protocolo de calibración por eco e inversión en sectores de Hamming (§105–§108) **413**
C.1 El protocolo 413
C.2 Costo 414
C.3 Un ejemplo exacto 414
C.4 Las cuatro corridas pre-registradas 415
Notas bibliográficas 416

D Referencia rápida de la API de qang 0.14.0 **417**
D.1 Nombres públicos por módulo 421
D.2 `qang.integrations` 424

E Registro de falsación: las predicciones que el repositorio permite comprobar **426**
E.1 Declaración de falsación 426
E.2 Veredictos guardados por el código 426
E.3 Pre-registros por sha256 428
E.4 Pre-registros por commit 429
E.5 Lo que este registro no incluye 430
Notas bibliográficas 431

F Fundamento de análisis funcional: Riesz–Fréchet **432**
F.1 El marco 432
F.2 El teorema 432
F.3 Aplicación: qg_Z tiene representante 433
F.4 Lo que no tiene representante: qg_S 433
F.5 Sobre el lema de Riesz (1918) 434
Notas bibliográficas 434

G La energía relativista y la antimateria como lecturas qang **435**
G.1 El ángulo relativista 435
G.2 $E = mc^2$ como una lectura: el valor esperado de β 436
G.3 La antimateria: la rama negativa y la conjugación de carga 437
G.4 Las probabilidades del documento fuente 438
G.5 Medir el ángulo relativista con disparos 438
G.6 La lectura de β en un chip real (§170) 439
G.7 Qué se afirma y qué no 440

H Catálogo de submedidas qang **442**
H.1 Lecturas base 443
H.2 Magnitudes derivadas 444
H.3 Estados y registros 446
H.4 Compuertas y compilación 449
H.5 Ruido y lectura 451
H.6 Lecturas de leyes físicas conocidas 454
H.7 Propuestas abiertas y descartadas 457
H.8 Balance 459
H.9 En código 459

Prefacio

Este libro reúne, en un orden de lectura, los resultados de un programa de investigación sobre una idea sencilla: describir el qubit por lo que se mide. La unidad qang (qg) expresa el estado de un qubit en la escala en la que el experimento lo entrega, el sesgo polar $qg_Z = \langle \sigma_z \rangle$, y de esa elección se desprende una herramienta práctica, el **filtro de simetría qg**: cuando un circuito conserva un número (excitaciones, fotones, sabor de neutrino, masa), los disparos que lo violan solo pueden venir del ruido y se descartan.

El recorrido va de los fundamentos (partes I y II) a las aplicaciones: neutrinos (parte III), teleportación en redes ópticas (parte IV), modelos de información de bucles temporales y agujeros negros (parte V), criptografía (parte VI), aprendizaje automático cuántico (parte VII), dinámica y química (parte VIII), corrección de errores y caracterización (parte IX). La parte X reúne la evidencia: el método, las ventajas confirmadas, los límites y los resultados negativos, y la primera corrida en hardware real.

Cómo leer los resultados

Tres convenciones atraviesan el libro:

- **Predicciones registradas antes de correr.** Cada experimento citado fijó sus predicciones antes de ejecutarse (un *commit* o un hash sha256 del script), y se informa como cumplido o fallido. Los fallos no se omiten: muchas de las lecciones del libro salen de ellos.
- **Ruido simulado salvo indicación.** Lo que se describe "en un dispositivo" corresponde a modelos de ruido calibrados de procesadores IBM o IonQ, salvo los resultados en hardware real, que se señalan explícitamente (capítulo 31).
- **Referencias a las notas.** Las citas del tipo (§151) remiten a la sección correspondiente de las notas de investigación del proyecto (`RESEARCH_NOTES.md`), donde están el código, las pruebas y los datos.

Código y datos

Todo el material es abierto: la biblioteca `qang` (`pip install qang`), los scripts de cada experimento, los cuadernos ejecutables y los datos están en github.com/Viny2030/qang. El registro de software tiene el DOI 10.5281/zenodo.22832150.

Estado de esta edición

El libro se escribe y publica por capítulos. Los capítulos marcados “en preparación” muestran su contenido previsto y se completan en ediciones sucesivas.

Vicente Humberto Monteverde — Universidad del Museo Social Argentino (UMSA), Argentina. ORCID 0000-0001-8884-4811.

Parte I

I. Fundamentos: la métrica angular-probabilística (la unidad qang)

1 La unidad qang: definición, mili-qang y la ecuación de probabilidad

Un qubit se diseña con ángulos y se observa con frecuencias. Quien escribe un circuito elige rotaciones $R_y(\theta)$; quien lo ejecuta recibe cuentas de ceros y unos. Entre ambas descripciones media una función trigonométrica que casi nunca se nombra, y que es la fuente de varias dificultades prácticas: gradientes que divergen, barras de error que se encogen o se inflan según el estado, y parámetros que no se pueden leer directamente del experimento. Este capítulo construye la base del libro en tres pasos: la **definición** de la unidad qang (qg), la **teoría del mili-qang** (su submúltiplo) y la **ecuación de probabilidad** que une ambas con lo que se mide. Cada resultado se respalda con un gráfico calculado con el propio paquete (`qang.probability`, §167), de modo que las figuras y el texto citan los mismos números.

1.1. Definición del qang

Todo estado puro de un qubit se escribe, salvo una fase global, como

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle, \qquad \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi).$$

La pareja (θ, φ) es un punto de la esfera de Bloch y es la forma natural de *preparar* el estado: una rotación $R_y(\theta)$ seguida de una fase $R_z(\varphi)$. Una medición en la base computacional no devuelve θ: devuelve, en cada disparo, el resultado 0 con probabilidad

$$p_0 = \cos^2\frac{\theta}{2} \qquad \text{(regla de Born).}$$

Definición. La unidad qang toma como coordenada primaria el valor esperado de σ_z, llamado *sesgo polar*:

$$\boxed{qg_Z = \langle \sigma_z \rangle = p_0 - p_1 = 2p_0 - 1 = \cos\theta} \qquad qg_Z \in [-1, 1].$$

De la misma probabilidad salen las otras dos lecturas de la unidad: el **ángulo qang** $\theta = \arccos(qg_Z) \in [0, \pi]$ y la **dispersión de superposición** $qg_S = H(p_0) \in [0, 1]$, la entropía de Shannon del resultado (se estudia más abajo). La Figura 1.1 resume la definición: el punto del círculo es el estado, su proyección sobre el eje vertical es qg_Z, y la escala de la derecha da la misma lectura en mili-qang y en probabilidad.

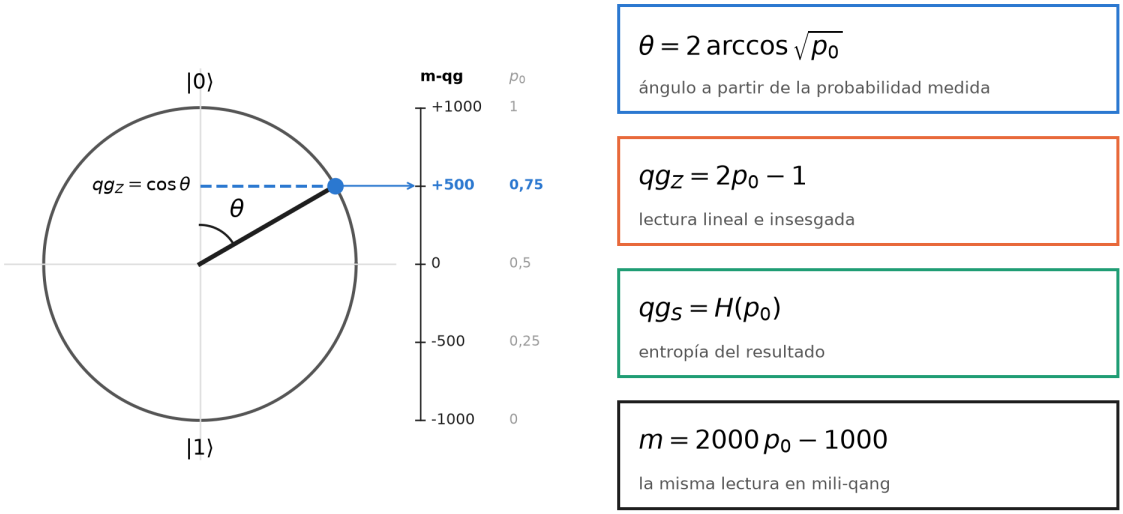


Figura 1.1: El círculo qang. El estado de ángulo $\theta = 60°$ tiene $p_0 = 0{,}75$, $qg_Z = \cos\theta = 0{,}5$ y una lectura de $+500$ m-qg. Las cuatro ecuaciones de la derecha son la misma probabilidad leída de cuatro maneras.

Tres propiedades hacen de qg_Z una buena coordenada de trabajo:

1. **Es una biyección.** En $\theta \in [0, \pi]$, la función $\cos\theta$ es estrictamente decreciente y recorre $[-1, 1]$: cada valor de qg_Z corresponde a una única latitud de la esfera.
2. **Es directamente medible.** $\widehat{qg}_Z = (n_0 - n_1)/N$ es el promedio de los resultados ± 1 de los disparos; no requiere inversión ni ajuste.
3. **Vale para cualquier estado.** Para un estado mixto, $qg_Z = \mathrm{Tr}(\rho\,\sigma_z)$, y se reduce a $\cos\theta$ cuando $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ (§3).

El signo y el rango tienen una lectura física inmediata: $qg_Z = +1$ es el polo $|0\rangle$, $qg_Z = -1$ el polo $|1\rangle$, y $qg_Z = 0$ cualquier punto del ecuador, donde el resultado de la medición es máximamente incierto.

Una unidad de ingeniería. Una unidad útil no necesita ser una magnitud física nueva; necesita volver legible lo que se mide. El decibelio no agrega física a la potencia: la expresa en una escala que vuelve sumables las ganancias de una cadena de amplificadores. El qang cumple un papel análogo para el qubit: expresa su estado en la escala en la que el experimento lo entrega, de modo que preparación, ruido y lectura se comparan en las mismas unidades. Es una convención operativa, y como toda convención vale por lo que simplifica.

1.2. Teoría del mili-qang

1.2.1. Definición y escala

Las desviaciones que importan en un qubit real son pequeñas: errores de calibración, deriva, ruido de lectura. Para expresarlas conviene un submúltiplo, el **mili-qang** (m-qg):

$$1 \text{ qg} = 1000 \text{ m-qg}, \qquad m = 1000\, qg_Z \ \in [-1000,\, +1000] \text{ m-qg}.$$

La escala va de -1000 m-qg en el polo $|1\rangle$ a $+1000$ m-qg en el polo $|0\rangle$, con el cero en el ecuador. Un estado con $qg_Z = 0{,}5018$ está a $501{,}8$ m-qg; su diferencia con el ideal $0{,}5$ es de $1{,}8$ m-qg. La misma definición vale para los otros ejes, qg_X y qg_Y, con lo que todo el vector de Bloch se expresa en m-qg.

1.2.2. Lineal en la probabilidad, no lineal en el ángulo

Como $qg_Z = 2p_0 - 1$, el mili-qang es **lineal en la probabilidad**: un m-qg equivale siempre a $\Delta p_0 = 0{,}0005$, es decir, 0,05 puntos porcentuales, en cualquier lugar de la escala. En cambio **no es lineal en el ángulo**:

$$\frac{dm}{d\theta} = -1000\, \sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\theta \approx \frac{1}{1000\, \sin\theta} \text{ rad por m-qg}.$$

En el ecuador ($\theta = 90°$) un m-qg es exactamente un miliradián; a $\theta = 30°$ son dos. Cerca de un polo la relación lineal deja de valer y hay que usar la exacta: un estado que está δ m-qg por debajo del polo $|0\rangle$ forma con él el ángulo

$$\theta_\delta = \arccos\!\left(1 - \frac{\delta}{1000}\right) \approx \sqrt{\frac{2\delta}{1000}}.$$

Un m-qg del polo son $0{,}0447$ rad ($2{,}56°$); diez m-qg, $8{,}1°$. La Figura 1.2 muestra la consecuencia: sobre la regla del mili-qang, las marcas de probabilidad están equiespaciadas y las de ángulo se amontonan en los polos. Por eso la unidad se define sobre la probabilidad y no sobre el ángulo: es la escala en la que el instrumento entrega los datos.

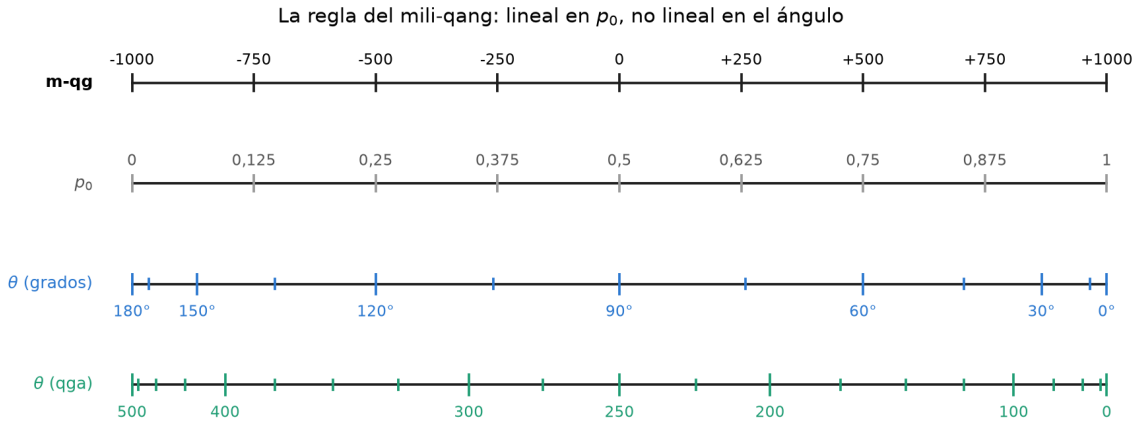


Figura 1.2: La regla del mili-qang. Arriba, la escala en m-qg; al medio, la probabilidad p_0, alineada y lineal; abajo, el ángulo qang en grados (marcas cada $15°$) y en qga, la escala angular de la Sección 1.4 (marcas cada 25 qga); las dos se comprimen hacia los polos.

1.2.3. Resolución por disparos

Con N disparos, $\widehat{qg}_Z$ tiene varianza $\sin^2\theta/N$ (lo derivamos en la sección del arcoseno), de modo que la desviación estándar de la lectura en mili-qang es

$$\sigma_m = \frac{1000\,\sin\theta}{\sqrt{N}}\ \text{m-qg}, \qquad N_\delta = \left(\frac{1000\,\sin\theta}{\delta}\right)^2$$

donde N_δ es el número de disparos necesario para resolver δ m-qg con un sigma. En el ecuador, resolver 10 m-qg requiere 10^4 disparos y resolver 1 m-qg, 10^6. A $60°$ y con 1000 disparos, $\sigma_m = 27{,}4$ m-qg; para bajar a 5 m-qg en ese mismo punto hacen falta 30 000 disparos. La Figura 1.3 compara σ_m con la incertidumbre del ángulo, $\sigma_\theta = 1/\sqrt{N}$: la lectura en m-qg es más precisa cerca de los polos, y la del ángulo vale lo mismo en todo el círculo. Las dos curvas se tocan en el ecuador, donde un m-qg es un miliradián.

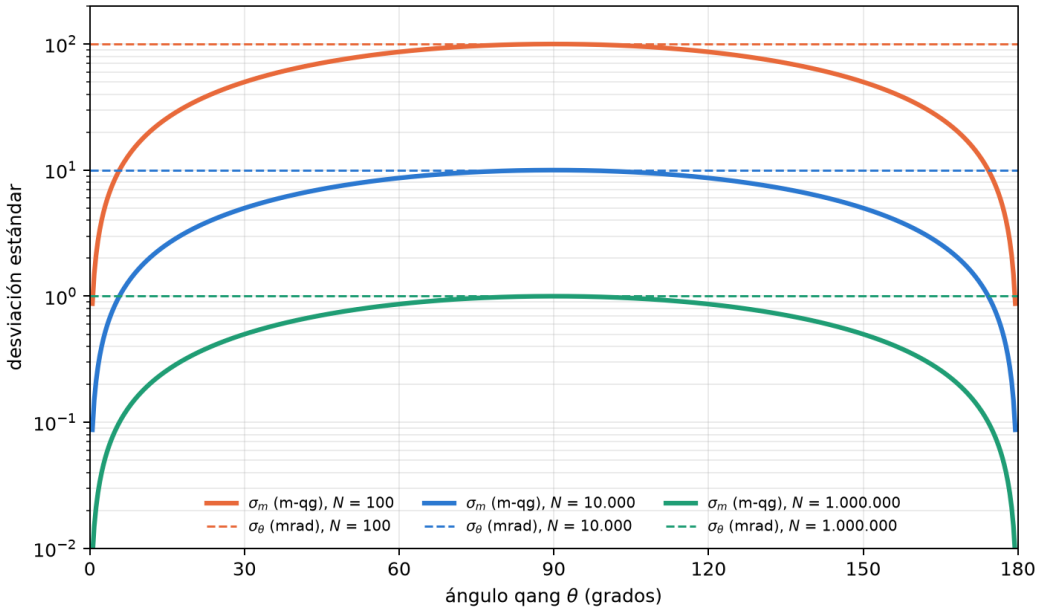


Figura 1.3: Resolución por disparos. Líneas llenas: desviación estándar σ_m de la lectura en m-qg; líneas punteadas: σ_θ del ángulo qang en miliradianes, que no depende del estado. Para cada N, ambas coinciden en $\theta = 90°$.

1.2.4. Presupuesto de error de compuerta

La escala permite expresar un error de compuerta en las mismas unidades que la lectura. Si la amplitud de un pulso tiene un error aleatorio relativo de desviación σ, el sesgo polar esperado tras $R_x(\theta)$ es

$$\mathbb{E}[qg_Z] = \cos\theta\, e^{-\theta^2\sigma^2/2} \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_m = 1000\cos\theta\left(e^{-\theta^2\sigma^2/2} - 1\right) \text{ m-qg}$$

(§160). El error acerca la lectura al ecuador: con $\sigma = 0{,}05$, una compuerta X ($\theta = \pi$) entrega $qg_Z = -0{,}988$ en lugar de -1, un corrimiento de $12{,}3$ m-qg. En los múltiplos de π el corrimiento crece con el cuadrado del ángulo, y siempre hacia el ecuador; en general va como $\theta^2\cos\theta$ (Figura 1.4). Una rotación de $\pi/2$ no se corre en absoluto, porque ya está en el ecuador. El capítulo 2 usa esta fórmula para elegir, entre representaciones equivalentes de una misma compuerta, la de menor área de pulso.

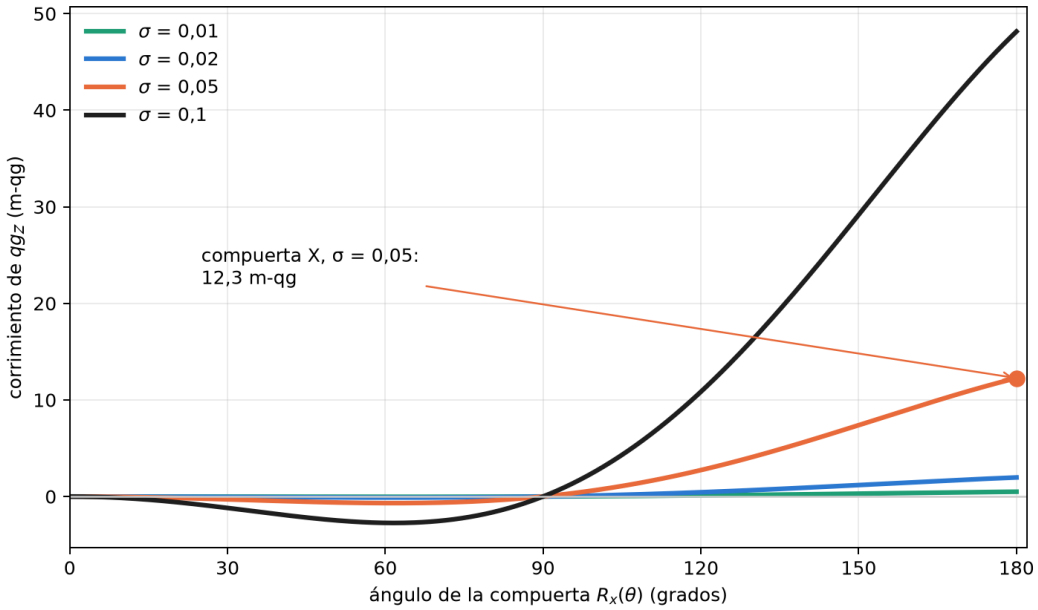


Figura 1.4: Presupuesto de error en mili-qang: corrimiento del sesgo polar tras $R_x(\theta)$ para distintos errores relativos de amplitud σ.

Los capítulos 2 y 3 usan dos derivadas de la lectura respecto del ángulo, que conviene nombrar aquí. El **gradiente polar** y la **curvatura** (o *impedancia de pulso*) son

$$\nabla_{qg} = \frac{dm}{d\theta} = -1000\,\sin\theta \ \text{ m-qg/rad}, \qquad \kappa_{qg} = \left|\frac{d^2 m}{d\theta^2}\right| = 1000\,|\cos\theta| \ \text{ m-qg/rad}^2.$$

No son lecturas nuevas: son derivadas de $m = 1000\cos\theta$. La curvatura explica el presupuesto anterior, porque a segundo orden en el error, $|\varepsilon_m| \approx \frac{1}{2}\,\theta^2\sigma^2\,\kappa_{qg}$: el error aleatorio de amplitud corre la lectura en proporción a κ_{qg}, que vale 1000 en los polos y 0 en el ecuador.

1.3. La ecuación de probabilidad del qang y del mili-qang

Las secciones anteriores llevan a un único enunciado, que es la base de todo el libro: **todas las lecturas qang de un qubit son funciones exactas de una sola probabilidad**, p_0:

$$\theta = 2\,\text{arc cos}\,\sqrt{p_0}, \qquad qg_Z = 2p_0 - 1, \qquad qg_S = H(p_0), \qquad m = 2000\,p_0 - 1000 \ \text{m-qg}$$

y, en sentido inverso, la ecuación de probabilidad del mili-qang:

$$p_0 = \frac{1000 + m}{2000}, \qquad \theta = \text{arc cos}\,\frac{m}{1000}.$$

No hay aproximaciones: son cuatro lecturas de un mismo número. La Figura 1.5 las muestra juntas. qg_Z y el mili-qang son la misma recta, en dos escalas; el ángulo es monótono pero se empina en los polos; la entropía sube hasta el ecuador y vuelve a bajar, por eso necesita una rama para invertirse. La Tabla 1.1 da los valores de referencia.

Tabla 1.1: Anclajes de la ecuación de probabilidad.

θ	p_0	qg_Z	m-qg	estado
0	1	$+1$	$+1000$	polo $\lvert 0\rangle$
$\pi/4$	0,854	$+0{,}707$	$+707$	
$\pi/3$	0,75	$+0{,}5$	$+500$	
$\pi/2$	0,5	0	0	ecuador ($\lvert +\rangle$, $\lvert +i\rangle$, ...)
$2\pi/3$	0,25	$-0{,}5$	-500	

θ	p_0	qg_Z	m-qg	estado
π	0	-1	-1000	polo $\lvert 1\rangle$

1.3.1. Más de dos resultados: la distancia estadística

La ecuación se generaliza a una medición con varios resultados. Para dos distribuciones $p = (p_k)$ y $q = (q_k)$, la **distancia estadística de Wootters** (1981), o ángulo de Bhattacharyya (Bhattacharyya 1943), es

$$d(p, q) = \arccos \sum_k \sqrt{p_k\, q_k}.$$

Para dos resultados, la distancia entre $(p_0, 1-p_0)$ y el polo $(1, 0)$ es $\arccos \sqrt{p_0} = \theta/2$: el ángulo qang es, salvo el factor 2, la distancia estadística entre lo que se mide y el estado de referencia. Con tres resultados, por ejemplo, $p = (0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}2)$ y $q = (0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}2)$ están a $0{,}113$ rad. Esta es la puerta por la que la unidad sale del qubit: la Parte II la usa para la información de Fisher y la métrica de Fubini–Study, y la misma geometría vale para cualquier proporción medida, cuántica o no.

1.4. La escala angular: el qang angular (qga)

La *Fundamentación geométrica y dimensional del sistema qang* (Monteverde 2026a) propone medir los ángulos en una base milesimal: una vuelta completa son 1000 unidades. El libro adopta esa escala, pero con otro nombre, porque en todo el libro, en la librería y en los capítulos que siguen, **m-qg designa la lectura** $m = 1000\, qg_Z$, que es lineal en la probabilidad y no es un ángulo (sección anterior). La escala angular se escribe **qga** (qang angular) y su milésima, **m-qga**:

$$1\,\text{vuelta} = 2\pi\,\text{rad} = 1000\,\text{qga} = 10^6\,\text{m-qga}, \qquad \theta[\text{rad}] = \frac{2\pi}{1000}\,\theta_{qga}, \qquad 1\,\text{m-qga} \approx 6{,}283{\cdot}10^{-6}\,\text{ra}$$

Con el ángulo polar de Bloch en qga, la regla de Born y la lectura quedan

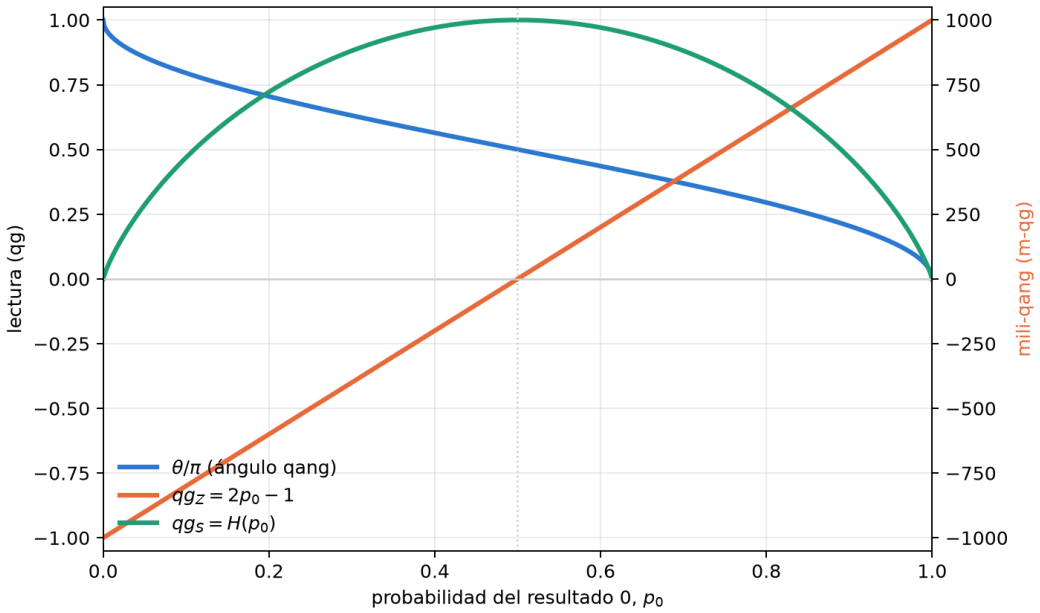


Figura 1.5: Las lecturas de una misma probabilidad. El eje derecho expresa qg_Z en mili-qang.

$$p_0 = \cos^2\frac{\pi\,\theta_{qga}}{1000} = \frac{1+\cos(2\pi\theta_{qga}/1000)}{2}, \qquad m = 1000\cos\frac{2\pi\,\theta_{qga}}{1000}\ \text{m-qg}.$$

El polo $|0\rangle$ está en 0 qga, el ecuador en 250 qga y el polo $|1\rangle$ en 500 qga; la fase φ recorre $[0, 1000)$ qga. Las dos escalas se complementan: el qga es uniforme en el ángulo y el m-qg es uniforme en la probabilidad. El estado de la Figura 1.1, por ejemplo, está a $166{,}667$ qga y lee $+500$ m-qg; en el ecuador, un m-qg de lectura equivale a un miliradián, es decir, a $0{,}159$ qga (159 m-qga).

En código, desde la versión 0.14.0, `qang.qga` hace estas conversiones: `p0_from_qga(250)` da 0,5, `milliqang_from_qga(1000/6)` da +500 m-qg y `qga_from_milliqang(-1000)` da 500 qga.

La coordenada azimutal. La fase se lee con dos mediciones transversales, $\varphi = \operatorname{atan2}(qg_Y, qg_X)$, porque $qg_X = \sin\theta\cos\varphi$ y $qg_Y = \sin\theta\sin\varphi$ y el cociente elimina $\sin\theta$. Expresada como fracción de vuelta, $qg_\varphi = (\varphi \bmod 2\pi)/2\pi \in [0, 1)$, es exactamente el ángulo azimutal en qga dividido por 1000. No está definida en los polos, donde $qg_X = qg_Y = 0$.

Geometría. La métrica de Fubini–Study de un qubit y la información de Fisher de la medición en Z tienen, en qga, un factor constante:

$$ds^2 = \tfrac{1}{4}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) = \frac{\pi^2}{10^6}\left(d\theta_{qga}^2 + \sin^2\theta\, d\varphi_{qga}^2\right), \qquad I_F(\theta) = 1\,\mathrm{rad}^{-2} = 4\pi^2{\cdot}10^{-6}\,\mathrm{qga}^{-2}$$

La segunda es la estabilización de la sección del arcoseno dicha en otra unidad: la desviación estándar del ángulo qang es $159{,}15/\sqrt{N}$ qga en todo el círculo (5,03 qga con 1000 disparos). La curvatura de Berry, $F = \frac{1}{2}\sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi$, integrada sobre la esfera (θ abarca 500 qga y φ, 1000) da 2π, es decir, número de Chern 1.

Correcciones a la Fundamentación. Tres afirmaciones del documento fuente no se adoptan, porque sus propias fórmulas las contradicen:

- Asigna $p_0 = 0{,}5$ a 125 qga. Con su propia ecuación, $p_0(125\ \mathrm{qga}) = \cos^2(\pi/8) = 0{,}854$ (+707 m-qg); $p_0 = 0{,}5$ corresponde a 250 qga.
- Atribuye curvatura $K = 1$ a la métrica $ds^2 = \frac{1}{4}d\theta^2$. Esa métrica, con su término azimutal, es la de una esfera de radio $1/2$, cuya curvatura gaussiana es $K = 4$; $K = 1$ es la de la esfera de Bloch de radio 1.
- Sugiere que una retícula en m-qga evita las mesetas estériles. Cambiar la unidad del parámetro multiplica todas las derivadas por la constante $2\pi/1000$: no cambia la relación entre la varianza del gradiente y su escala ni su decaimiento con el número de qubits. La unidad no tiene efecto sobre las mesetas. Otra cosa son las herramientas de qang, que sí las mitigan en regímenes probados: el costo local en qg (Sección 23.7) y el filtro de peso bajo T1 (Sección 20.6).

1.4.1. Propuesta sin verificar: energía y antimateria en qga

La Fundamentación extiende la escala a la cinemática relativista. Lo que sigue es una **propuesta sin verificar**: se corrigen las identidades, pero la interpretación física no está probada y el resto del libro no la usa.

Ángulo relativista. De $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$, al dividir por E^2, se obtiene $\cos\theta_r = mc^2/E = 1/\gamma$ y $\sin\theta_r = pc/E = \beta$. La identidad es exacta, porque $1/\gamma^2 + \beta^2 = 1$. Con θ_r en qga, $E = mc^2/\cos(2\pi\theta_{r,qga}/1000)$: el reposo está en 0 qga y el límite ultrarrelativista ($E = pc$), en 250 qga. El ángulo θ_r se relaciona con la rapidez η por $\cos\theta_r = 1/\cosh\eta$ (la función de Gudermann), sin necesidad de rotación de Wick.

Antimateria. La ecuación de Dirac da dos ramas, $E_\pm = \pm\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} = \pm\, mc^2/\cos\theta_r$. La Fundamentación asigna a la rama negativa un desplazamiento

de 500 qga, ligado a la simetría CPT. Esa identificación no tiene respaldo y no se adopta.

Probabilidades. La Fundamentación iguala $P_{\text{reposo}} = (mc^2/E)^2$ con $p_0(\theta_{qga})$. Hay un factor 2 en el ángulo: $(mc^2/E)^2 = \cos^2\theta_r$, mientras que $p_0 = \cos^2(\theta/2)$, de modo que la igualdad sólo vale si el ángulo de Bloch es $2\theta_r$. Si en cambio se toma el ángulo de Bloch igual a θ_r, sí hay un resultado conocido detrás de las fórmulas $\cos^2(\pi\,\text{qg}/1000)$ y $\sin^2(\pi\,\text{qg}/1000)$ del documento: en el espinor de Dirac libre, la componente grande pesa $(E+mc^2)/2E = \cos^2(\theta_r/2)$ y la pequeña, $\sin^2(\theta_r/2)$. Pero esos pesos no son probabilidades de «materia» y «antimateria», como los llama el documento fuente: los dos pertenecen a la misma solución de energía positiva.

El apéndice G (Apéndice G) desarrolla esta propuesta. Encuentra una lectura exacta de $E = mc^2$, el valor esperado de la matriz de Dirac β, que vale mc^2/E y es por lo tanto un qg_Z. También muestra que la conjugación de carga invierte esa lectura.

Nombres propuestos. Tabla 1.2 recoge los nombres que introduce la Fundamentación y cómo los trata el libro.

Tabla 1.2: Nombres de la Fundamentación para la energía, la antimateria y las unidades derivadas, y cómo los trata el libro.

nombre de la Fundamentación	definición	tratamiento en el libro
ángulo relativista θ_r	$\cos\theta_r = mc^2/E$, $\sin\theta_r = \beta$	identidad exacta; en qga, propuesta
$E(\text{qg}) = mc^2/\cos(2\pi\,\text{qg}/1000)$	energía total en función de θ_r	exacta, con θ_r en qga
$E_\pm$, hojas de materia y antimateria	$\pm mc^2/\cos\theta_r$	ramas de Dirac; el desplazamiento CPT de 500 qga no se adopta
P_{reposo}, $P_{\text{cinético}}$	$(mc^2/E)^2$, β^2	suman 1; no son p_0, p_1 del mismo ángulo (factor 2)
P_{materia}, $P_{\text{antimateria}}$	$\cos^2$, $\sin^2$ del semiángulo	pesos de las componentes grande y pequeña del espinor, no probabilidades de antimateria

nombre de la Fundamentación	definición	tratamiento en el libro
Q-Hertz (qHz)	qga por segundo	unidad de frecuencia angular; propuesta
Q-Fisher (qFi)	información de Fisher por qga²	$4\pi^2 \cdot 10^{-6}$ qga^{-2} para un qubit puro
Q-Shannon (qg_S)	entropía de Shannon del resultado	es qg_S; no es la entropía de von Neumann
Q-Curvatura, Q-SNR, Q-Geodésica, déficit disipativo	qg_κ, qg_{SNR}, qg_L, qg_τ	definidas y verificadas en la Sección 1.11
Q-Fuerza, Q-Conductancia, Q-Momento	gradiente de fase, qga por voltio, $(\pi/500)\hbar$	nombres propuestos, sin uso en el libro

1.5. Por qué medir en qg: la brecha geometría–probabilidad

La relación $p_0 = \cos^2(\theta/2)$ entre el parámetro de control y la cantidad observada es no lineal, y su derivada se anula en los polos. Esto tiene consecuencias concretas. Si un algoritmo variacional quiere ajustar el estado en función de lo que mide, la regla de la cadena introduce el factor

$$\frac{dE}{dq} = -\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{dE}{d\theta},$$

que diverge en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ (notas de investigación, §1). Y si se quiere estimar θ a partir de N disparos, la varianza de $\hat{p}_0$ cambia con el estado, de modo que la incertidumbre de cada lectura depende de dónde esté el qubit (§5). Ninguno de los dos problemas es exótico: aparecen en cuanto se intenta razonar en términos de lo que el experimento entrega, y la ecuación de probabilidad es la herramienta para tratarlos.

1.6. Inversión y el signo de rama

El ángulo se recupera con $\theta = \arccos(qg_Z)$. La inversión tiene un límite: $\cos\theta$ es par, de modo que qg_Z no distingue θ de $-\theta$. Mientras se trabaja en $[0, \pi]$ no

hay problema, pero un optimizador que necesita cruzar un polo queda atrapado. El remedio es medir también el signo del seno: el par (qg_Z, s) con $s = \operatorname{sign}(qg_X)$ es biunívoco en todo el círculo (§65). En la molécula de H_2 el óptimo variacional está en $\theta \approx -0{,}22$; toda actualización que usa solo qg_Z se detiene en el estado de Hartree–Fock, mientras que la versión con signo llega a la energía exacta.

1.7. La entropía del resultado: qg_S

El sesgo polar dice *hacia dónde* apunta el qubit; no dice cuán impredecible es la medición. Para eso está la **dispersión de superposición**, la entropía de Shannon del resultado:

$$qg_S = H(p_0) = -p_0 \log_2 p_0 - (1 - p_0) \log_2 (1 - p_0) \in [0, 1].$$

Como qg_Z y qg_S dependen de la misma población p_0, están ligadas por una identidad exacta y sin ramas (§7):

$$qg_S = H\left(\frac{1 + qg_Z}{2}\right),$$

válida para todo estado de un qubit, puro o mixto, cualquiera sea su preparación. Su derivada, $\frac{d\,qg_S}{d\,qg_Z} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1-qg_Z}{1+qg_Z}$, diverge en los polos: es la contraparte entrópica de la singularidad del gradiente. Cerca de un polo, un cambio mínimo del sesgo produce un cambio relativo enorme de la entropía.

1.8. Invertibilidad de qg_S y sus barras de error

A diferencia de qg_Z, la entropía no es invertible en todo el dominio: $qg_S(\theta) = qg_S(\pi - \theta)$. La población p_0 decrece de 1 a 0 en $[0, \pi]$ y H crece hasta $p = \frac{1}{2}$ y luego decrece, de modo que qg_S es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$ y estrictamente decreciente en $[\pi/2, \pi]$ (Figura 1.5). La inversión exige elegir una de las dos mitades (§2).

Estimar qg_S con disparos finitos plantea un problema adicional: la entropía es plana en su máximo, y el método delta da un error estándar nulo exactamente donde $qg_S \approx 1$. La solución nativa de qang es construir el intervalo de Wilson para qg_Z y transformarlo con la identidad anterior; como H es unimodal, la imagen es un intervalo válido. Con 2000 repeticiones, ese intervalo mantuvo una cobertura

de 0,90–0,99 en todos los casos probados, incluso donde el intervalo de Wald o el bootstrap caían por debajo de 0,40 (§51).

1.9. El ángulo qang como transformación arcoseno

La propiedad estadística central de la unidad se obtiene propagando el ruido de disparo. Con $\widehat{qg}_Z = 2\hat{p}_0 - 1$,

$$\operatorname{Var}(\widehat{qg}_Z) = \frac{\sin^2\theta}{N}, \qquad \operatorname{Var}(\hat{\theta}) \approx \operatorname{Var}(\widehat{qg}_Z)\left(\frac{d\theta}{d\,qg_Z}\right)^2 = \frac{\sin^2\theta}{N}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{1}{N}.$$

Los factores $\sin^2\theta$ se cancelan exactamente: **la incertidumbre del ángulo qang no depende del estado** (§5), que es la línea punteada horizontal de la Figura 1.3. No es una coincidencia. Como $p_0 = \cos^2(\theta/2)$, el ángulo qang es, salvo la reflexión $\theta \to \pi - \theta$, la clásica transformación arcoseno de una proporción, $\phi = 2\arcsin\sqrt{p}$, introducida por Bartlett (1947), Anscombe (1948) y Freeman y Tukey (1950) precisamente para estabilizar la varianza (§125).

La afirmación se verificó con sumas binomiales exactas, sin simulación: con $n = 100$, $(n + \frac{1}{2})\operatorname{Var}(\hat{\theta})$ vale entre 1,000 y 1,001; la cobertura del intervalo $\hat{\theta} \pm z/\sqrt{n + 1/2}$ queda entre 0,930 y 0,962 para $n \in \{30, 100, 1000\}$. La predicción falló en un caso, y conviene decirlo: con $np \approx 2{,}5$ tanto el intervalo angular como el de Wald pierden cobertura. La estabilización es asintótica, y el régimen de muy pocos eventos requiere los intervalos exactos del capítulo 4.

1.10. Estados mixtos y registros de varios qubits

Las definiciones se extienden sin cambios a estados mixtos y a registros:

- **Estados mixtos.** $qg_Z = \operatorname{Tr}(\rho\sigma_z)$ ya no determina el estado. La mezcla clásica de $|0\rangle$ con peso 0,2 y $|1\rangle$ con peso 0,8 tiene $qg_Z = -0{,}6$ y entropía de von Neumann 0,72, una combinación que ningún estado puro reproduce (§3). El ángulo qang $\theta = \arccos qg_Z$ sigue siendo función de p_0, así que conserva $\operatorname{Var}(\hat{\theta}) = 1/N$ también aquí: la probabilidad no sabe si el estado es puro. Lo que pierde la estabilización es la estimación del ángulo polar de Bloch, $\arccos(qg_Z/r)$, de un qubit de longitud $r < 1$: $\operatorname{Var} = \left[1 + \frac{1-r^2}{r^2\sin^2\theta}\right]/N$, igual a la cota cuántica de Cramér–Rao $1/(Nr^2)$ en el ecuador (§45).

- **Registros.** Cada qubit tiene su perfil local, obtenido por traza parcial, y el registro tiene una entropía conjunta normalizada por el número de qubits (§4). El estado de Bell lo ilustra: cada qubit tiene $qg_Z = 0$ y entropía local de 1 bit, pero la entropía de Shannon conjunta de los resultados, normalizada, es 0,5 (la de von Neumann del registro es 0). El registro es globalmente puro y localmente mezclado; los perfiles locales no bastan para describirlo, y el capítulo 5 vuelve sobre este punto con el radio de Bloch.

1.11. Magnitudes derivadas de la lectura

La formulación del tratado (Monteverde 2026a) nombra, sobre esta base, siete magnitudes derivadas. Todas salen de la lectura —de qg_Z, o del vector qg completo cuando hace falta—, de modo que no agregan información a p_0: dan nombre a combinaciones que el resto del libro usa. La Tabla 1.3 las reúne con su definición, lo que son en términos de la estadística o de la física usuales y el tratamiento que reciben aquí. El apéndice H (Apéndice H) cataloga éstas y las demás submedidas del libro con la decisión que mejora cada una y su evidencia.

Tabla 1.3: Magnitudes derivadas de la formulación y cómo las trata el libro.

magnitud	definición	qué es	tratamiento en el libro
Q-Hertz (qHz)	qga por segundo	frecuencia angular en la escala qga: 1 qHz $= 2\pi/1000$ rad/s	unidad de conveniencia
Q-Fisher (qFi)	información de Fisher por qga²	$I_F = 4\pi^2 \cdot 10^{-6}$ qga^{-2} sobre el ángulo qang, para todo estado	exacta (Sección 1.4)
Q-Shannon (qg_S)	$H(p_0) = H\big((1+qg_Z)/2\big)$	entropía de Shannon del resultado	exacta (Sección 1.7)
Q-Curvatura (qg_κ)	$-d^2 qg_S/d\,qg_Z^2 = 1/[\ln 2\,(1-qg_Z^2)]$	información de Fisher sobre qg_Z, en bits	exacta; en optimizadores, sin ganancia (Sección 30.4)
Q-SNR (qg_{SNR})	$\lvert qg_Z\rvert/\sqrt{1-qg_Z^2} = \lvert\cot\theta\rvert$	señal a ruido de un disparo	exacta; fija los disparos para leer un signo

magnitud	definición	qué es	tratamiento en el libro
Q-Geodésica (qg_L)	$\arccos\left(\sqrt{p_0 p_0'} + \sqrt{p_1 p_1'}\right) = \lvert\theta - \theta'\rvert/2$	ángulo de Bhattacharyya entre dos lecturas	exacta; es la distancia de Fubini–Study en un meridiano común
Déficit disipativo (qg_τ)	$\sqrt{1-r^2} = \sqrt{1 - qg_X^2 - qg_Y^2 - qg_Z^2}$	$2\sqrt{\det\rho}$, la falta de pureza	exacta; mide pérdida de pureza de cualquier origen

Las tres primeras ya aparecieron. Sobre la Q-Fisher, una precisión: la formulación describe su constancia como la de una variedad plana, y no lo es. Lo constante es la información sobre una sola coordenada, el ángulo polar; la esfera de Bloch con la métrica de Fubini–Study tiene curvatura gaussiana 4 (Sección 1.4).

Curvatura de información. Derivando dos veces la identidad $qg_S = H((1 + qg_Z)/2)$ de la Sección 1.7,

$$\frac{d\, qg_S}{d\, qg_Z} = \frac{1}{2}\log_2 \frac{1 - qg_Z}{1 + qg_Z}, \qquad qg_\kappa = -\frac{d^2 qg_S}{d\, qg_Z^2} = \frac{1}{\ln 2\,(1 - qg_Z^2)}.$$

El denominador es la varianza de un disparo, de modo que $qg_\kappa = I_F(qg_Z)/\ln 2$: la curvatura de la entropía es la información de Fisher que un disparo lleva sobre el sesgo polar, expresada en bits. Vale $1/\ln 2 = 1{,}443$ en el ecuador y diverge en los polos, donde la entropía es más sensible. Para un estado puro, $1 - qg_Z^2 = \sin^2\theta$ y $qg_\kappa = 1/(\ln 2\, \sin^2\theta)$. **Atención a la notación:** qg_κ no es la curvatura de pulso $\kappa_{qg} = 1000\,|\cos\theta|$ de la Sección 1.2. Aquella es la derivada segunda de la lectura respecto del ángulo; ésta, la de la entropía respecto de la lectura. La formulación propone usar qg_κ para amortiguar el paso de un optimizador junto a los polos. Escalar el paso por la inversa de la información de Fisher es el gradiente natural (Amari 1998), y el capítulo 30 lo mide (Sección 30.4): en la coordenada qg_Z ese paso es, a primer orden, el descenso de gradiente sobre θ, y no trae ninguna aceleración propia.

Señal a ruido por disparo. Un disparo vale ± 1, con media qg_Z y desviación estándar $\sqrt{1 - qg_Z^2}$, para cualquier estado, puro o mixto. Su cociente y el número de disparos que pide un signo son

$$qg_{SNR} = \frac{|qg_Z|}{\sqrt{1 - qg_Z^2}} = |\cot\theta|, \qquad N_{\text{signo}} = \left(\frac{z}{qg_{SNR}}\right)^2,$$

con $\theta = \arccos qg_Z$, el ángulo qang. Con N disparos la señal a ruido es $\sqrt{N}\, qg_{SNR}$, y N_{signo} es el número de disparos para que el signo de qg_Z quede a z desviaciones del cero: es el criterio de parada que propone la formulación. A 60° (+500 m-qg) $qg_{SNR} = 0{,}577$ y bastan 27 disparos para un signo a 3σ; a 80° hacen falta 290, y a 89°, unos 29 500. En el ecuador la señal se anula y el criterio no termina. Como toda fórmula de este capítulo basada en la aproximación normal, vale cuando N_{signo} no es muy chico; con pocos disparos se usa la prueba binomial exacta.

Distancia geodésica. Dos lecturas (p_0, p_1) y (p_0', p_1') están a la distancia estadística de Wootters de la Sección 1.3, y para dos resultados esa distancia es

$$qg_L = \arccos\left(\sqrt{p_0 p_0'} + \sqrt{p_1 p_1'}\right) = \frac{|\theta - \theta'|}{2},$$

porque $\sqrt{p_0 p_0'} + \sqrt{p_1 p_1'} = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} = \cos\frac{\theta-\theta'}{2}$. Es la mitad de la diferencia de ángulos qang, es decir, la distancia entre lecturas en la escala que estabiliza la varianza. Si los dos estados son puros y comparten el meridiano, qg_L coincide con la distancia de Fubini–Study $\arccos|\langle\psi|\psi'\rangle|$. Con azimutes distintos es una cota inferior, porque una medición no distingue dos estados más de lo que los distingue su solapamiento. El capítulo 3 la usa entre los estados de un reflector (Sección 3.4).

Déficit disipativo. Con las tres lecturas qg_X, qg_Y y qg_Z se forma el vector qg **r**, de largo $r \le 1$, y

$$qg_\tau = \sqrt{1 - r^2} = 2\sqrt{\det\rho}, \qquad \operatorname{Tr}\rho^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\, qg_\tau^2.$$

Vale 0 para un estado puro y 1 para el estado máximamente mezclado. La mezcla 0,2/0,8 de la sección anterior tiene $r = 0{,}6$ y $qg_\tau = 0{,}8$; cada qubit de un par de Bell, $qg_\tau = 1$. La formulación la asocia a la relajación T_1 y T_2, que es una de sus causas, pero la magnitud mide la pérdida de pureza sin distinguir el origen: un promedio sobre errores de calibración también la produce (capítulo 2, Sección 2.6). A diferencia de las anteriores, no es función de p_0: requiere medir en tres bases.

1.12. Alcance y límites de la base

Conviene decir con precisión qué aporta esta base y qué no, antes de construir el resto del libro sobre ella.

Lo que no es. La unidad qang no es física nueva. El sesgo polar es el valor esperado de σ_z, el ángulo qang es la transformación arcoseno de una proporción y el mili-qang es, matemáticamente, $1000\,\langle\sigma_z\rangle$. Ninguna de estas lecturas contiene información que la probabilidad p_0 no tenga ya; la ecuación de probabilidad lo dice explícitamente. Tampoco reduce los disparos que exige una precisión dada (capítulo 4).

Lo que es. Una escala de trabajo, en el sentido del decibelio: pone en las mismas unidades la preparación, el error de compuerta, el ruido de disparo y la lectura, de modo que se suman, se comparan y se presupuestan. La pregunta que importa es entonces empírica: ¿razonar en mili-qang predice lo que hace un procesador real?

Primera prueba en hardware (§168). Se respondió con un experimento preregistrado en un qubit del procesador superconductor IQM Garnet: 26 circuitos de 4000 disparos, con cuatro predicciones fijadas antes de la corrida. El resultado fue mixto, y se informa completo:

- **El costo de una compuerta es medible y presupuestable en m-qg.** Encadenando de 3 a 41 compuertas X, el faltante de la lectura (corregida por los errores de lectura medidos en los polos) crece con una sola pendiente: **1,64 m-qg por compuerta** X, con χ^2 por grado de libertad de 0,81. Tras 41 compuertas son 63 m-qg, ocho desviaciones estándar por encima de cero (Figura 1.6, izquierda). Que el crecimiento sea lineal y no cuadrático indica error incoherente, relajación durante los pulsos, y no una sobre-rotación coherente.
- **La escala hace visible un error que el modelo de lectura oculta.** La lectura afín predicha desde los polos encaja en el ecuador, pero los cuatro ángulos intermedios leen entre 16 y 55 m-qg por debajo (Figura 1.6, derecha). El procesador calibra bien los ángulos 0, $\pi/2$ y π; los demás están sobre-rotados entre $1{,}3^\circ$ y $3{,}9^\circ$. La predicción pasó por la regla de 4 de 5, no limpiamente.
- **Una predicción falló.** Las diez copias del circuito del ecuador variaron la mitad de lo que permite el ruido de disparo binomial, algo que disparos independientes no pueden producir y que por azar ocurre con probabilidad 0,013. Una sola corrida no decide si fue casualidad o una propiedad de cómo el dispositivo devuelve circuitos en lote.

- **Otra predicción estaba mal diseñada.** El ajuste de dos parámetros sobre cuatro puntos dejó una banda de extrapolación tan ancha que cualquier lectura pasaba. Se registra como defecto del diseño, no como éxito.

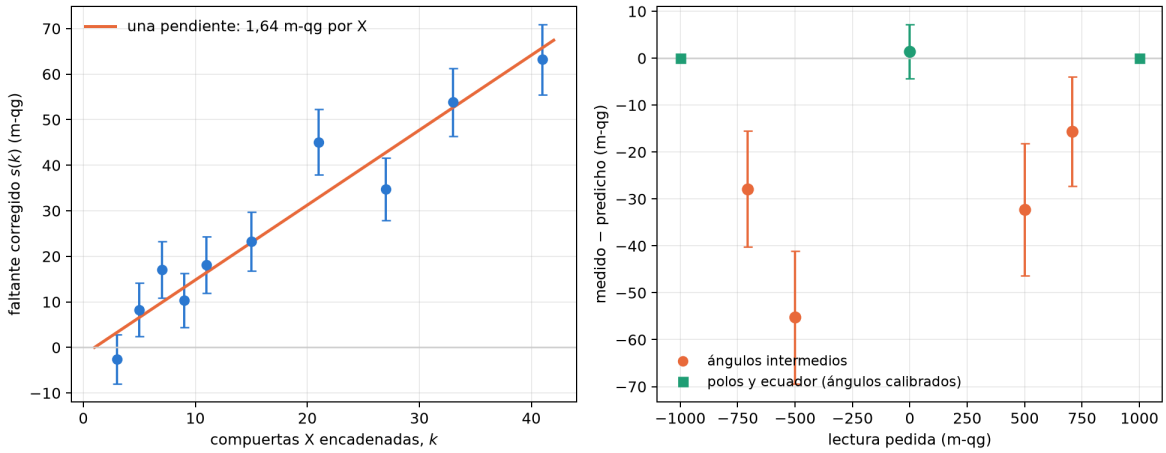


Figura 1.6: Primera prueba del mili-qang en hardware (§168, IQM Garnet, un qubit, 4000 disparos por circuito). Izquierda: faltante de la lectura tras k compuertas X, corregido por la lectura, con la recta de una sola pendiente. Derecha: diferencia entre lo medido y lo predicho por la lectura afín; los polos valen cero por construcción, porque definen la calibración.

El balance: en un chip real, el mili-qang convirtió el error de una compuerta en un número presupuestable y expuso un error de ángulo que el modelo usual no ve. Pero se probó en un qubit, una vez, y el ruido de disparo no describió la dispersión de circuitos repetidos. La replicación en más qubits y en otro día queda pendiente, y el libro trata esta base como sólida en lo matemático y prometedora, pero todavía no consolidada, en lo experimental.

Segunda prueba en hardware (§170). En el mismo qubit de Garnet se leyó $E = mc^2$ como lectura, con el qubit de β del apéndice G (Sección G.6). El autoestado de Dirac a $0{,}6c$ leyó $+759{,}9 \pm 14{,}9$ m-qg, cuando el valor previsto era $1000/\gamma = +800$, y su reflejo en la rama negativa leyó $-809{,}4$. El *Zitterbewegung* apareció a la frecuencia prevista, con 0,44 % de diferencia. Las cinco predicciones se cumplieron. El sesgo bajo en ángulos intermedios volvió a aparecer, en la misma dirección que en §168, lo que apunta a un rasgo del dispositivo más que a una casualidad de una corrida. Las dos pruebas son en un solo qubit: la replicación sigue pendiente.

Propuestas abiertas. La versión de trabajo del autor añade a esta base tres propuestas, que el libro registra como **sin verificar**:

- Una energía variacional regularizada, $E_{\text{total}} = \langle H \rangle + \lambda_\theta L_{\text{qang}}(\theta) + \lambda_\varphi L_{\text{qang}}(\varphi)$. Aquí la energía es el valor esperado de un hamiltoniano, no la energía relativista de la sección anterior. La forma de las penalizaciones L_{qang} y el valor de los pesos λ no están definidos.
- Una función de radiación normalizada, $R(\theta, \varphi) = N\,[\,p_1 + \alpha \cos\varphi\,]$, con la población excitada $p_1 = \sin^2(\theta/2)$ como potencia emisora. No se fijan N ni α, ni se contrasta con un modelo de emisión.
- Mecanismos contra las mesetas estériles (costos locales en m-qg, compilación de mínima curvatura κ_{qg}, inicialización con el signo de rama). Dos herramientas de qang ya están probadas en las redes del libro. El **costo local en qg**, $(1 - \overline{qg_Z})/2$, la idea de Cerezo et al. (2021) escrita como lectura, tiene 470 veces más varianza de gradiente que el costo global con 10 qubits y circuitos cortos (Sección 23.7). El **filtro de peso** devuelve bajo T1 exactamente el gradiente sin ruido, a 10^{-16}, contra una meseta inducida por ruido (Sección 20.6; predicción pre-registrada, §112). Las dos tienen límites medidos: con circuitos profundos el costo local también decae exponencialmente y, donde escapa a la meseta, es simulable clásicamente; y el propio sector de peso aplana el gradiente al crecer el registro, con filtro o sin él: como un polinomio en peso 1, que es simulable, y exponencialmente con media ocupación. El capítulo 23 reúne las tres fuentes de meseta y lo que qang hace con cada una (Sección 23.8). La compilación por κ_{qg} y la inicialización con signo de rama no se han probado contra las mesetas.

1.13. Sin qang y con qang

Tabla 1.4: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
describir el resultado de un qubit	la probabilidad p_0 (o $\langle Z \rangle$)	qg_Z, el ángulo θ, m y qg_S, todos funciones exactas de p_0	**ninguna en contenido**: es la misma información; qang le da una escala de trabajo de -1000 a $+1000$

acción	sin qang	con qang	diferencia
barra de error de una lectura	$\sqrt{p_0(1-p_0)/N}$, distinta en cada estado	el ángulo tiene varianza $1/N$ para todo estado; en m-qg, $1000 \sin\theta/\sqrt{N}$	**conveniencia**: la coordenada estabilizada de la estadística clásica (el arcoseno) coincide con el parámetro de la compuerta
comparar un error de compuerta con el ruido de disparo	infidelidad por un lado, desvío binomial por otro, en unidades distintas	los dos en m-qg (en Garnet, 1,64 m-qg por compuerta X frente al ruido de disparo de la corrida)	**a favor**: una sola escala para el presupuesto de errores
decidir cuántos disparos pide el signo de una lectura	prueba binomial o aproximación normal	$N = (z/qg_{SNR})^2$, con $qg_{SNR} = \lvert\cot\theta\rvert$	**conveniencia**: es la aproximación normal escrita con la lectura
expresar un ángulo de compuerta o de fase	radianes, con factores π	qga: 1000 por vuelta (X = 500 qga, ecuador = 250 qga)	**conveniencia**: la misma información sin factores π; no cambia gradientes ni mesetas
mejorar el dispositivo	—	—	**ninguna**: la escala mide, no corrige; la predicción M2 de §168 falló

Balance. La base no agrega información a p_0: la reorganiza. Lo que gana es una barra de error uniforme en el ángulo y una unidad común para errores de compuerta y ruido de disparo, que son exactamente las dos cosas que se usan en el resto del libro.

1.14. En código

El módulo `qang.probability` es la herramienta de análisis de este capítulo: lee conteos y devuelve todas las lecturas, cada una con su intervalo.

```
import math
from qang import probability as pb

pb.readings_from_p0(0.75)      # theta = 1.047 (60°), qg_Z = 0.5, qg_S = 0.811, 500 m-qg

# 750 ceros en 1000 disparos, frente a un objetivo qg_Z = 0.5
r = pb.analyze(750, 1000, target_qg_z=0.5)
r.milliqang               # (500.0, 444.5, 551.7) m-qg: estimación e intervalo de Wilson
r.theta                  # (1.047, 0.986, 1.110) rad = 60.0°, 56.5°, 63.6°
r.qg_s                           # (0.811, 0.768, 0.852)
r.deviation_milliqang            # 0.0 m-qg respecto del objetivo

pb.angle_per_milliqang(math.pi / 2)      # 0.001 rad: un m-qg es un miliradián en el ecuad
pb.pole_angle(1.0)                 # 0.0447 rad: un m-qg por debajo del polo
pb.shots_for_resolution(10, math.pi / 2)  # 10000 disparos para resolver 10 m-qg
pb.pulse_error_milliqang(math.pi, 0.05)   # 12.3 m-qg: compuerta X con 5 % de error de amp
pb.statistical_angle([0.5, 0.3, 0.2], [0.4, 0.4, 0.2])   # 0.113 rad

# magnitudes derivadas
pb.quantum_snr(0.5)                # 0.577: señal a ruido de un disparo a 60°
pb.shots_for_sign(0.5)                   # 27 disparos para un signo a 3σ
pb.information_curvature(0.0)          # 1.443 = 1/ln 2, la curvatura mínima (ecuador)
pb.dissipative_deficit(0.0, 0.0, -0.6)     # 0.8: la mezcla 0,2/0,8
```

Las figuras de este capítulo se generan con `tools/make_cap01_figures.py`, que usa las mismas funciones.

1.15. Resumen

- **Definición.** El sesgo polar $qg_Z = \langle \sigma_z \rangle = 2p_0 - 1 = \cos\theta$ es biyectivo, medible directamente y válido para estados mixtos; el ángulo qang $\theta = \arccos qg_Z$ y la entropía $qg_S = H(p_0)$ completan la unidad.
- **Mili-qang.** 1 qg $= 1000$ m-qg; la escala es lineal en la probabilidad (1 m-qg $= \Delta p_0 = 0{,}0005$) y no lineal en el ángulo (1 mrad en el ecuador, $2{,}56^\circ$ junto

al polo). Resolver δ m-qg requiere $(1000 \sin\theta/\delta)^2$ disparos, y los errores de compuerta se presupuestan en las mismas unidades.

- **Ecuación de probabilidad.** θ, qg_Z, qg_S y m son funciones exactas de una sola probabilidad p_0; con varios resultados, el ángulo qang se generaliza a la distancia estadística de Wootters.
- **Escala angular.** El qang angular mide ángulos con 1000 qga por vuelta y es distinto del m-qg, que es una lectura: $p_0 = \cos^2(\pi\theta_{qga}/1000)$ y $I_F = 4\pi^2 \cdot 10^{-6}$ qga^{-2}. La extensión a la energía relativista y a la antimateria queda como propuesta sin verificar, con tres errores del documento fuente corregidos.
- **Estadística.** El ángulo qang es la transformación arcoseno de una proporción: su varianza es $1/N$ para todo estado, puro o mixto; lo que se corrige en un estado mixto es la estimación del ángulo de Bloch.
- **Magnitudes derivadas.** qg_κ es la información de Fisher sobre qg_Z en bits (y no la curvatura de pulso κ_{qg}); $qg_{SNR} = |\cot\theta|$ fija los disparos para leer un signo; $qg_L = |\theta - \theta'|/2$ es la distancia de Wootters entre dos lecturas; $qg_\tau = \sqrt{1 - r^2}$ mide la falta de pureza y es la única que necesita tres bases.
- **Alcance.** La unidad no es física nueva sino una escala de trabajo. En hardware real (§168) midió un costo de 1,64 m-qg por compuerta X, lineal en el número de compuertas, y expuso corrimientos de lectura de 16–55 m-qg (sobre-rotaciones de $1{,}3^\circ$–$3{,}9^\circ$); una predicción sobre el ruido de disparo falló y la replicación queda pendiente.

Notas bibliográficas

La regla de Born (Born 1926) y la esfera de Bloch (Bloch 1946) son el punto de partida; para estados, mediciones y canales en general, véase Nielsen y Chuang (2010). La distancia estadística de Wootters (1981) y su relación con la información de Fisher están en Braunstein y Caves (1994); la cota de Cramér–Rao, en Cramér (1946) y Rao (1945). La transformación arcoseno que estabiliza la varianza binomial viene de Bartlett (1947), Anscombe (1948) y Freeman y Tukey (1950), y el intervalo de puntaje es el de Wilson (1927). La entropía binaria detrás de qg_S es la de Shannon (1948); el gradiente natural, con el que se compara la curvatura de información qg_κ, es el de Amari (1998). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c). La escala angular qga y la propuesta relativista vienen del documento de trabajo Monteverde (2026a); el espinor de Dirac libre y sus componentes están en cualquier texto de mecánica cuántica relativista.

2 Compuertas nativas, álgebra cerrada y el operador universal

El capítulo 1 describió el estado de un qubit en unidades qg y redujo todas sus lecturas a una sola probabilidad, p_0, con el mili-qang como escala de trabajo. Este capítulo hace lo mismo con las operaciones: cómo se prepara un estado a partir de su probabilidad o de su lectura en m-qg, cómo se escribe cualquier compuerta de un qubit como función algebraica de qg_Z, por qué su acción sobre las poblaciones es la ecuación de probabilidad del capítulo 1, cómo se extiende la idea a sistemas de más niveles, y qué reglas de compilación se desprenden cuando el error de una compuerta, medido en m-qg, depende de su ángulo.

2.1. La compuerta elemental R_{qg}

La operación básica es preparar, desde $|0\rangle$, el estado de sesgo polar q: una rotación $R_y(\theta)$ con $\theta = \arccos q$. qang la ofrece como compuerta nativa en los tres kits de desarrollo más usados (§6):

- **Qiskit:** `RQangGate(q)` y `FullRQangGate(q, φ)`, esta última con la fase azimutal.
- **Cirq:** `rqang_gate(q)`, construida sobre `cirq.ry`, y `full_rqang_gate(q, φ)`, una `MatrixGate` con la misma convención que la compuerta `U` de Qiskit.
- **PennyLane:** el mismo par, diferenciable respecto de q.

Por la ecuación de probabilidad (Sección 1.3), el parámetro de la compuerta se puede fijar desde cualquiera de las lecturas: para obtener una probabilidad p_0 se usa $q = 2p_0 - 1$, y para una lectura de m m-qg, $q = m/1000$. Pedir $p_0 = 0{,}75$ o $+500$ m-qg es pedir la misma compuerta, $R_y(60^\circ)$. En la escala angular qga de la Sección 1.4 (1000 qga por vuelta), esa compuerta es $R_y(166{,}667\ \text{qga})$: el ángulo de una compuerta se escribe sin factores π, con X en 500 qga y el ecuador en 250 qga.

Las tres preparan exactamente el mismo estado para un mismo valor de qg, lo que se verifica tanto con las probabilidades medidas como con la fidelidad del vector

de estado. La compuerta acepta parámetros simbólicos (`Parameter` de Qiskit, símbolos de sympy), de modo que puede formar parte de circuitos parametrizados.

Una variante con signo, `SignedRQangGate`, aplica $R_y(s \cdot \arccos q)$ con $s = \pm 1$: es la forma de compuerta del signo de rama del capítulo 1, y prepara el mismo estado que la compuerta completa con $\varphi = 0$ o π (§68).

2.2. El operador universal en qg

Toda compuerta de un qubit es, salvo una fase global, $U(\theta, \varphi, \lambda)$. Con $q = \cos\theta$ los semiángulos se vuelven algebraicos,

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+q}{2}}, \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-q}{2}},$$

y la compuerta universal queda escrita sin funciones trigonométricas en q:

$$U_3^{qg}(q, \varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1+q}{2}} & -e^{i\lambda}\sqrt{\dfrac{1-q}{2}} \\ e^{i\varphi}\sqrt{\dfrac{1-q}{2}} & e^{i(\varphi+\lambda)}\sqrt{\dfrac{1+q}{2}} \end{pmatrix}.$$

La amplitud depende solo del sesgo polar y las fases quedan desacopladas en los factores $e^{i\varphi}$ y $e^{i\lambda}$. Una consecuencia inmediata es la **matriz de transición**, las probabilidades $|U_{ij}|^2$:

$$T(q) = \begin{pmatrix} \frac{1+q}{2} & \frac{1-q}{2} \\ \frac{1-q}{2} & \frac{1+q}{2} \end{pmatrix},$$

doblemente estocástica, racional en q e independiente de las fases. Desde el punto de vista de la medición en la base computacional y para entradas sin coherencias, toda compuerta de un qubit es un canal binario simétrico de parámetro $(1-q)/2$.

2.3. La compuerta como ecuación de probabilidad

La matriz de transición es la ecuación de probabilidad del capítulo 1 escrita para una operación. Con $p_0 = (1+q)/2$,

$$T = \begin{pmatrix} p_0 & 1-p_0 \\ 1-p_0 & p_0 \end{pmatrix}, \qquad p_0 = \frac{1000+m}{2000} :$$

sobre una entrada sin coherencias ($|0\rangle$, $|1\rangle$ o una mezcla clásica de ellos), la acción de cualquier compuerta de un qubit sobre las poblaciones queda fijada por **un solo número**, su lectura en m-qg. La identidad y Z están en $+1000$ m-qg (no mueven poblaciones), X en -1000 (las intercambia) y la Hadamard en 0 (las iguala). Las fases φ y λ no aparecen: son invisibles para una medición en Z y solo se revelan al componer compuertas, como muestra el capítulo 3. Sobre una entrada con coherencias, la fórmula completa es $p_0' = T(q)\,p - \sqrt{1-q^2}\ \mathrm{Re}(e^{-i\lambda}\rho_{01})$: la Hadamard sobre $|+\rangle$ da $p_0 = 1$, no el $0{,}5$ que daría $T(0)$.

La lectura entrópica también tiene su versión para operaciones. La capacidad del canal binario simétrico de parámetro $(1-q)/2$ es $1 - H\big((1-q)/2\big)$, y como H es simétrica, $H\big((1-q)/2\big) = H(p_0) = qg_S$:

$$C = 1 - qg_S.$$

Una compuerta en un polo ($qg_S = 0$) transmite un bit completo por cada uso; la Hadamard ($qg_S = 1$) no transmite nada de la base computacional a sí misma.

La curvatura de información del capítulo 1 (Sección 1.11) tiene aquí una lectura directa. Como $C = 1 - qg_S$,

$$\frac{d^2C}{dq^2} = qg_\kappa = \frac{1}{\ln 2\,(1-q^2)} :$$

la capacidad es convexa en el sesgo de la compuerta, con su mínimo en la Hadamard, y se curva cada vez más junto a los polos. Apartarse lo mismo de un polo o del ecuador no cuesta lo mismo: una compuerta a $+990$ m-qg, 10 m-qg por debajo del polo, transmite $0{,}955$ bits, ya $0{,}045$ menos que la identidad; una a $+10$ m-qg, 10 m-qg por encima del ecuador, transmite $7 \cdot 10^{-5}$ bits, casi lo mismo que la Hadamard.

2.4. Verificación contra las bibliotecas estándar

La fórmula se comprobó contra la compuerta `U` de Qiskit 2.6 en 2000 compuertas aleatorias, con una diferencia máxima de $1{,}8 \times 10^{-16}$, y lo mismo contra Cirq, PennyLane y QuTiP (§166, `tools/verify_cap02.py`). Las compuertas habituales aparecen en valores simples:

Tabla 2.1: Compuertas estándar como puntos de U_3^{qg}.

compuerta	q	m-qg	θ (qga)	φ	λ
I	1	$+1000$	0	0	0
X	-1	-1000	500	0	π (500 qga)
Z	1	$+1000$	0	0	π (500 qga)
H	0	0	250	0	π (500 qga)

La tabla tiene una lectura en qg: X es el único caso de sesgo -1 (invierte el qubit), Z y la identidad no cambian las poblaciones ($q = 1$) y difieren solo en una fase, y la Hadamard lleva al ecuador ($q = 0$).

2.5. Más allá del qubit: la subálgebra de Cartan

Para un sistema de d niveles (un qudit), el análogo de σ_z no es una sola matriz sino la **subálgebra de Cartan** de $\mathfrak{su}(d)$: las $d-1$ matrices de Gell-Mann generalizadas diagonales,

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{2}{k(k+1)}}\ \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, -k, 0, \dots, 0), \qquad k = 1, \dots, d-1,$$

normalizadas con $\mathrm{Tr}(\lambda_j \lambda_k) = 2\delta_{jk}$. Sus valores esperados son lineales en las poblaciones y las determinan:

$$p = \frac{1}{d} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d-1} \langle \lambda_k \rangle\ \mathrm{diag}(\lambda_k).$$

Para $d = 2$ queda una sola matriz, $\lambda_1 = \sigma_z$, su valor esperado es $q g_Z$ y la fórmula se reduce a $p_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, q g_Z$: la ecuación de probabilidad del capítulo 1. Esta es la

generalización natural de la unidad: un vector de $d-1$ valores qg medibles en la base computacional, cada uno expresable en m-qg, que fija las d probabilidades del mismo modo que qg_Z fija p_0 (§166).

Conviene separar la definición de la utilidad. La pregunta de si una lectura de tres niveles le da a qang una ventaja se planteó con un caso concreto, la fuga de un transmon al nivel $|2\rangle$ en una memoria de código de superficie, y la respuesta fue negativa: leer $|2\rangle$ como 1 suele ser correcto, y declarar el qubit borrado descarta esa información (§70). qang sigue siendo una construcción de qubits; la generalización a qudits es una identidad, no una ventaja demostrada.

2.6. El principio de área de pulso mínima

En los dispositivos con compuertas fraccionarias (rotaciones $R_X(\theta)$ o $R_{ZZ}(\theta)$ de ángulo continuo), el área del pulso crece con $|\theta|$, y con ella crecen el error por mala calibración de amplitud y la relajación durante el pulso. En unidades qg, un error de amplitud aleatorio de desviación σ amortigua la lectura como

$$qg_Z = \cos\theta \; e^{-\theta^2\sigma^2/2},$$

y uno fijo ε da $\cos(\theta(1+\varepsilon))$, con error de primer orden $-1000\,\varepsilon\,\theta\sin\theta$ m-qg. La sensibilidad a un error absoluto de ángulo, $d\,qg_Z/d\theta = -\sin\theta$, es máxima en $\pi/2$ y se anula en 0 y π; el error fijo es relativo ($\varepsilon\theta$) y pesa más cerca de 116° (§160). Es el presupuesto de error en mili-qang del capítulo 1 (Figura 1.4), y la escala hace comparables el error de la compuerta y el ruido de disparo de la lectura: con $\sigma = 0{,}05$, el corrimiento de una X (12,3 m-qg) es unas ocho veces la resolución de 10^4 disparos en su lectura, $-987{,}7$ m-qg, donde $\sigma_m = 1000\sin\theta/\sqrt{N} = 1{,}6$ m-qg (en el ecuador serían 10 m-qg). En términos de la curvatura del capítulo 1, el corrimiento aleatorio es, a segundo orden, $\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\kappa_{qg}$: depende del área ($\theta^2$) y de dónde termina el estado ($\kappa_{qg} = 1000|\cos\theta|$), que se anula en el ecuador.

Cada compuerta tiene representantes más cortos. $R_X(\theta) = -R_X(\theta - 2\pi)$ tiene período 2π salvo una fase global (1000 qga), y la Figura 2.1 muestra lo que se gana: pedir $R_X(324^\circ) = R_X(900\text{ qga})$ tal cual corre la lectura $-31{,}7$ m-qg, mientras que su representante $R_X(-36^\circ) = R_X(-100\text{ qga})$, la misma compuerta, la corre $-0{,}4$ m-qg.

El déficit disipativo del capítulo 1 (Sección 1.11) completa el presupuesto. El promedio sobre el error de amplitud no mueve el vector qg fuera de su meridiano; lo acorta:

$$\mathbf{r} = e^{-\theta^2\sigma^2/2}\,(0,\,-\sin\theta,\,\cos\theta), \qquad qg_\tau = \sqrt{1 - e^{-\theta^2\sigma^2}} \approx |\theta|\,\sigma.$$

A diferencia del corrimiento en m-qg, que depende de dónde termina el estado y se anula en el ecuador, qg_τ depende sólo del área. Con $\sigma = 0{,}05$ vale $0{,}156$ para X y $0{,}078$ para $R_X(\pi/2)$, cuya lectura no se corre en absoluto; para $R_X(324^\circ)$ vale $0{,}277$ y para su representante $R_X(-36^\circ)$, $0{,}031$. La lectura en m-qg ve el área sólo cuando el estado termina lejos del ecuador; qg_τ, que exige medir en tres bases, la ve siempre. Aquí el déficit no viene de la relajación sino de promediar compuertas que difieren de un disparo a otro: el nombre de la formulación describe una de sus causas, no la única.

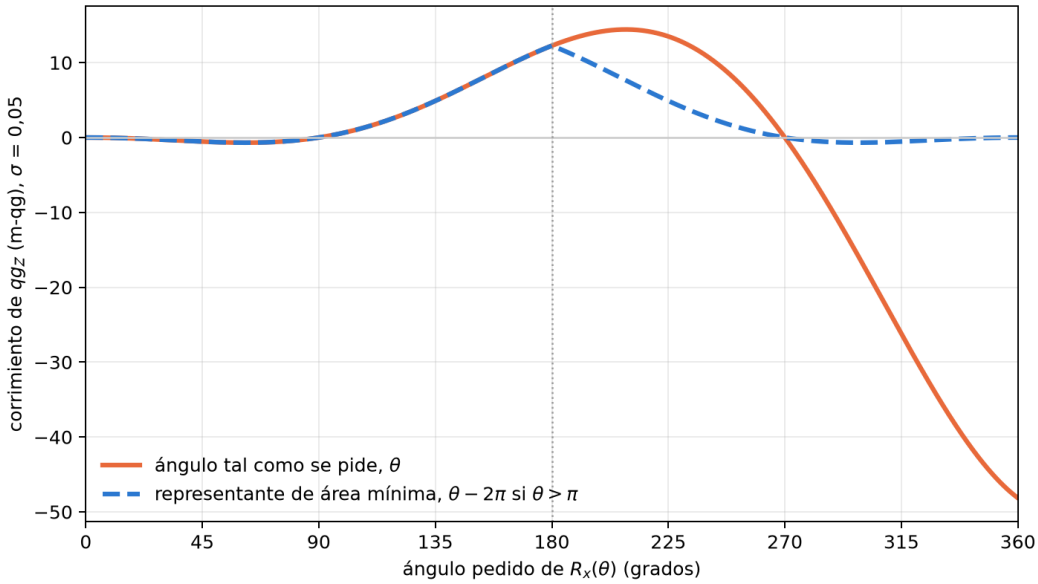


Figura 2.1: Error en mili-qang de $R_x(\theta)$ con un error de amplitud aleatorio $\sigma = 0{,}05$: el ángulo tal como se pide frente al representante de área mínima. Por debajo de 180° coinciden; por encima, el representante corto evita el error que, en los múltiplos de π, crece con el cuadrado del ángulo.

Más interesante: $R_{ZZ}(\theta + \pi) = R_{ZZ}(\theta)\,(-i\,Z \otimes Z)$, y $Z \otimes Z$ son dos rotaciones $R_Z(\pi)$ virtuales, sin costo en los procesadores superconductores. Así R_{ZZ} tiene período π (500 qga) y su área nunca necesita superar $\pi/2$ (250 qga). La función `minimal_area_circuit` reescribe un circuito con esos representantes y conserva el unitario exactamente, fase global incluida.

En un modelo de QAOA de 4 qubits con errores proporcionales al área (150 instancias), reducir los ángulos módulo 2π bajó el área total 4,4× y el error (distancia

de variación total) 4,1×; usar además el período π de R_{ZZ} lo bajó 1,37× más en el mismo cociente de medianas. La predicción registrada se refería a la mediana de los cocientes por instancia, que fue 1,14× frente a 1,5×, y falló: la mitad del área, la de las rotaciones R_X, ya era mínima tras la primera reducción. El resultado general se mantiene: **el error sigue al área**. Dos precisiones de alcance: en los procesadores IBM las rotaciones comunes de un qubit son R_Z virtuales más pulsos $\sqrt{X}$ fijos, de duración independiente del ángulo, de modo que la regla aplica a las compuertas fraccionarias; y el beneficio depende de cuánto escala el error con el área en cada plataforma.

La versión de trabajo del autor propone además usar esta compilación de mínima curvatura, junto con una energía variacional regularizada y una función de radiación ligada a la población excitada $p_1 = (1 - q)/2$, contra las mesetas estériles inducidas por ruido. Son las propuestas abiertas del capítulo 1 (Sección 1.12): **sin verificar**, y el libro no les atribuye ningún resultado.

2.7. Pantalla de exposición antes de correr

El filtro de simetría (capítulos 20–21) descarta los disparos que salieron del sector de peso de Hamming conservado. Pero un decaimiento que ocurre mientras parte del estado está fuera del sector puede volver a entrar y pasar el filtro. Eso sugiere una medida previa, calculable sin ruido: la **exposición**, la población fuera del sector inmediatamente después de cada compuerta de dos qubits (`qang.sectors.sector_exposure`).

Sobre 16 compilaciones de un paso de una cadena XXZ, la correlación de rangos entre exposición y fuga de T1 fue exactamente 0,80, el umbral registrado, y las compilaciones de exposición nula eliminaron al menos 98 % del error de T1 (§68):

Tabla 2.2: Exposición calculada sin ruido frente a la fuga medida.

compilación	exposición	fuga de T1
3 CNOT	0,42	16–52 %
Mølmer–Sørensen, ZZ por cambio de base	0,16–0,24	20–78 %
rotaciones Mølmer–Sørensen	0,0006–0,047	0,4–17 %
que conserva el número	0	0,0–2,0 %

La pantalla ordena compilaciones, no pasos de tiempo: dentro de una misma compilación la relación es más débil. Su valor práctico es elegir la compilación antes de gastar disparos.

2.8. Un único orden de qubits para todos los kits

Un detalle práctico que causa errores silenciosos: Qiskit escribe el qubit 0 a la derecha de la cadena de bits, mientras que Cirq, PennyLane, Braket y pytket lo ponen primero. `qang.interop` convierte cualquier resultado a $\{(b_0, \ldots, b_{n-1}) : \text{cuenta}\}$ y calcula sobre esa forma las lecturas qg: qg_Z por qubit con su error, el filtro y la entropía del registro (§130). Un estado W de 3 qubits muestreado con 20 000 disparos en cada kit dio qg_Z entre 0,316 y 0,343 (ideal $1/3$), todos los disparos en peso 1 y entropía del registro 0,528 (ideal $\log_2 3/3$), igual en los tres. En mili-qang, las lecturas van de 316 a 343 m-qg frente a 333 ideales; con 20 000 disparos la resolución es $\sigma_m = 1000 \sin\theta/\sqrt{N} = 6{,}7$ m-qg, de modo que la mayor desviación (-17 m-qg) está a unos 2,6σ: es ruido de disparo, no una diferencia entre kits.

2.9. Sin qang y con qang

Tabla 2.3: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
preparar un estado con una probabilidad dada	calcular $\theta = 2 \arccos\sqrt{p_0}$ y aplicar $R_Y(\theta)$	la compuerta R_{qg} recibe directamente la lectura objetivo, en qg o en m-qg	**conveniencia**: la compuerta física es la misma
describir la acción de una compuerta sobre las poblaciones	la matriz unitaria completa, con fases	una matriz de transición doblemente estocástica fijada por un número en m-qg, con capacidad $1 - qg_S$	**conveniencia** para poblaciones, con entradas sin coherencias; **en contra** para fases, que la descripción pierde (capítulo 3)
presupuestar el error de una compuerta fraccionaria	fidelidad de proceso	error en m-qg: de $-31{,}7$ a $-0{,}4$ m-qg para $R_X(324^\circ)$ con el representante de área mínima	la mejora es del **principio de área mínima**; el m-qg la vuelve comparable con el ruido de disparo

acción	sin qang	con qang	diferencia
ver el área de un pulso en el ecuador	fidelidad de proceso o tomografía	$qg_\tau = \sqrt{1 - e^{-\theta^2\sigma^2}}$, que crece con el área aunque la lectura en m-qg no se corra	**conveniencia**: es la pureza del estado tomográfico, con nombre qg
generalizar a qudits	matrices de Gell-Mann	la subálgebra de Cartan como identidad qg	**ninguna demostrada**: no se encontró ventaja en leer más niveles

Balance. En compuertas, qang es una forma compacta de escribir lo que pasa con las poblaciones, y el m-qg es la unidad en la que el error de pulso y el ruido de disparo se comparan. La ganancia medida, la del área mínima, es del principio físico, no de la unidad.

2.10. En código

```
import math
from qang import algebra, probability, pulse_area

U = algebra.u3_qang(0.0, 0.0, math.pi)    # la Hadamard como punto (q, φ, λ) = (0, 0, π)
algebra.transition_matrix(0.3)          # [[0.65, 0.35], [0.35, 0.65]]: p0 = 0.65, +300 m
algebra.cartan_values([0.5, 0.3, 0.2])    # los dos valores qg de un qutrit

pulse_area.minimal_area_angle(3.5, math.pi)   # (0.358, 1): RZZ(3.5) = RZZ(0.358) · (Z ⊗
pulse_area.rx_qg_z_random_amplitude(math.pi, 0.05)  # -0.988 en lugar de -1
probability.pulse_error_milliqang(math.pi, 0.05)    # 12.3 m-qg de error en una X

th, s = math.radians(324), 0.05               # R_X(324°) con 5 % de error de amplitud
r = math.exp(-(th * s) ** 2 / 2)
probability.dissipative_deficit(0.0, -r * math.sin(th), r * math.cos(th))  # 0.277; con
```

2.11. Resumen

- La preparación por sesgo polar es nativa en Qiskit, Cirq y PennyLane, con la misma convención y una variante con signo.
- Toda compuerta de un qubit es una función algebraica de $q = qg_Z$ y dos fases; su matriz de transición es doblemente estocástica, no depende de las fases y es la ecuación de probabilidad del capítulo 1: un solo número en m-qg fija su acción sobre las poblaciones de una entrada sin coherencias, y la capacidad del canal es $1 - qg_S$, con curvatura qg_κ: se pierde capacidad mucho más rápido al apartarse de un polo que del ecuador.
- La subálgebra de Cartan de $\mathfrak{su}(d)$ generaliza qg_Z a qudits como identidad; no se demostró una ventaja de la lectura de más niveles.
- En compuertas fraccionarias el error sigue al área de pulso; elegir el representante más corto lo reduce (de $-31{,}7$ a $-0{,}4$ m-qg para $R_X(324^\circ)$), y el presupuesto se expresa en m-qg, la misma escala que el ruido de disparo. El déficit disipativo $qg_\tau \approx |\theta|\sigma$ depende sólo del área y la muestra también donde la lectura en m-qg no se corre.
- La exposición fuera del sector, calculada sin ruido, ordena compilaciones según cuánto T1 dejará pasar el filtro.

Notas bibliográficas

La universalidad de las compuertas de un qubit más un entrelazador está en Barenco et al. (1995) y Nielsen y Chuang (2010); la descomposición de Cartan de $SU(2^n)$, en Khaneja y Glaser (2001). Los kits contra los que se verifica la compuerta son Qiskit (Javadi-Abhari et al. 2024), PennyLane (Bergholm et al. 2018), Cirq (Cirq Developers 2026) y Amazon Braket (Amazon Web Services 2020). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

3 Reflexiones, Householder y la dinámica de Grover

El algoritmo de Grover es, en el fondo, una sucesión de reflexiones. Escrito en unidades qg, cada reflexión es una matriz algebraica en el sesgo polar, la trayectoria del algoritmo es un polinomio de Chebyshev y la información que aporta cada iteración tiene una fórmula cerrada. Todo descansa en la base del capítulo 1: la probabilidad de transición entre dos estados es una probabilidad como p_0, con su propio ángulo qang y su lectura en m-qg, y el sesgo de la bandera de Grover se lee en la misma escala. Las magnitudes derivadas del capítulo 1 (Sección 1.11) se leen aquí sobre el algoritmo: la distancia geodésica qg_L entre los estados de un reflector, la señal a ruido qg_{SNR} y la curvatura de información qg_κ a lo largo de la trayectoria, y el déficit disipativo qg_τ como medida de la visibilidad que el ruido le deja a la estimación de amplitud. El capítulo desarrolla esa lectura y la contrasta con lo que ocurre cuando las compuertas tienen ruido, donde la lectura qg pierde frente a la herramienta más simple.

3.1. Matrices de transición sin funciones trascendentes

El capítulo 2 mostró que toda compuerta de un qubit tiene matriz de transición

$$T(q) = \begin{pmatrix} \frac{1+q}{2} & \frac{1-q}{2} \\ \frac{1-q}{2} & \frac{1+q}{2} \end{pmatrix},$$

doblemente estocástica y racional en q. Por construcción es *uniestocástica*: proviene de un unitario. Su composición enseña la diferencia entre probabilidad clásica y amplitud cuántica. Dos canales clásicos de sesgos q_1 y q_2 se componen multiplicando: $T(q_1)T(q_2) = T(q_1 q_2)$. Dos rotaciones cuánticas sucesivas, en cambio, dan

$$q_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) = q_1 q_2 - \sqrt{(1-q_1^2)(1-q_2^2)}.$$

El término $-\sqrt{(1-q_1^2)(1-q_2^2)}$ es la interferencia: la parte transversal de cada estado, invisible en T, que se suma en amplitud. Con $q_1 = 0{,}3$ y $q_2 = -0{,}5$, la composición clásica da $-0{,}15$ y la cuántica $-0{,}976$: en mili-qang, -150 frente a -976, una interferencia de 826 m-qg, cerca de la mitad de la escala. La matriz de transición describe cada compuerta por separado, pero no la secuencia: para eso hacen falta las fases. En la escala angular qga del capítulo 1 (Sección 1.4) la composición cuántica es simplemente aditiva: $\theta_1 = 201{,}5$ qga, $\theta_2 = 333{,}3$ qga, la suma es $534{,}8$ qga y $\cos(2\pi \cdot 534{,}8/1000) = -0{,}976$. Lo que no es aditivo es la lectura en m-qg.

3.2. El reflector de Householder en espacio qg

Una reflexión respecto del estado $|\psi\rangle$ es el operador de Householder $I - 2|\psi\rangle\langle\psi|$. Para $|\psi(q)\rangle = \sqrt{\frac{1+q}{2}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1-q}{2}}|1\rangle$ resulta

$$H(q) = I - 2|\psi(q)\rangle\langle\psi(q)| = -q\,\sigma_z - \sqrt{1-q^2}\;\sigma_x,$$

una matriz hermítica, unitaria y con $H(q)^2 = I$, cuyos coeficientes son los propios valores qg del estado: q en σ_z y su parte transversal $\sqrt{1-q^2}$ en σ_x (§166). En la esfera de Bloch es la rotación de ángulo π (500 qga) alrededor del eje del estado, compuesta con un cambio de signo global.

3.3. El difusor de Grover como reflexión qg

El difusor de Grover refleja respecto del estado inicial: $D = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I$. Comparando con la sección anterior,

$$D(q) = -H(q) = q\,\sigma_z + \sqrt{1-q^2}\;\sigma_x.$$

En el plano de dos dimensiones del algoritmo (el estado “bueno”, buscado, y el “malo”, su complemento), el oráculo es la reflexión respecto del eje malo y el difusor la reflexión respecto del estado inicial. El producto de dos reflexiones es una rotación por el doble del ángulo entre sus ejes: esa es toda la dinámica de Grover. En la métrica de Fubini–Study (Sección 1.4), cada iteración recorre la misma longitud de arco sobre un círculo máximo: $2t$ en el espacio de Hilbert, es decir, $4t$ en el ángulo de Bloch del qubit bandera de la sección de Chebyshev.

3.4. Probabilidad de transición entre estados qg

La fidelidad entre dos estados puros se escribe con sus vectores qg $\mathbf{r} = (qg_X, qg_Y, qg_Z)$:

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 = \frac{1 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{2}.$$

Si los dos estados comparten el meridiano (la misma fase azimutal), queda en función de los sesgos polares solamente:

$$P(q_1 \to q_2) = \frac{1 + q_1 q_2 + \sqrt{(1 - q_1^2)(1 - q_2^2)}}{2}.$$

La condición importa: con azimutes distintos, los sesgos polares no bastan y hace falta la parte transversal completa. La fórmula se verificó contra el producto interno en 200 pares aleatorios (§166).

La probabilidad de transición en la ecuación del capítulo 1. P es una probabilidad, de modo que tiene sus propias lecturas qang. Si γ es el ángulo entre los dos vectores de Bloch, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \cos\gamma$ y $P = \cos^2(\gamma/2)$: es la regla de Born con γ en el lugar de θ. Por lo tanto

$$2\arccos\sqrt{P} = \gamma, \qquad m_P = 2000\,P - 1000 = 1000\;\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \text{ m-qg} :$$

el ángulo qang de la probabilidad de transición es el ángulo entre los estados, y su lectura en mili-qang es mil veces el producto escalar de sus vectores qg. Es la distancia estadística de Wootters del capítulo 1 aplicada a dos estados (Sección 1.3). Con $q_1 = 0{,}3$ y $q_2 = -0{,}5$ en el mismo meridiano, $P = 0{,}838$, $m_P = +676$ m-qg y $\gamma = 0{,}828$ rad, que es exactamente $|\theta_1 - \theta_2| = |\arccos 0{,}3 - \arccos(-0{,}5)|$. En qga, $\gamma = 131{,}8$ qga y $P = \cos^2(\pi\gamma_{qga}/1000)$.

La distancia geodésica. La distancia de Fubini–Study entre los dos estados, el recorrido mínimo entre ellos sobre el espacio de estados, es

$$qg_L = \arccos\sqrt{P} = \frac{\gamma}{2},$$

la magnitud qg_L del capítulo 1: en el ejemplo, $0{,}414$ rad ($65{,}9$ qga). En un meridiano común coincide con el ángulo de Bhattacharyya de las dos lecturas en Z, de modo que se obtiene de dos histogramas de un qubit sin tomografía. Con azimutes distintos la lectura en Z la subestima: dos estados con $q = 0{,}45$ y fases

0 y π tienen la misma lectura, y por tanto ángulo de Bhattacharyya nulo en Z, pero $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| = 0{,}45$ y están a $qg_L = \arccos 0{,}45 = 1{,}104$ rad (175,7 qga). Hace falta entonces la parte transversal completa.

3.5. La trayectoria de Grover como polinomio de Chebyshev

Sea $a = \sin^2 t$ la fracción de estados buenos, leída con un qubit bandera cuyo sesgo inicial es $qg_0 = 1-2a = \cos 2t$. Cada iteración avanza el ángulo de amplitud en $2t$, de modo que tras k iteraciones el ángulo es $(2k+1)t$ y

$$qg_k = \cos\left((2k+1)\,2t\right) = T_{2k+1}(qg_0),$$

con T_m el polinomio de Chebyshev de primera especie, $T_m(\cos x) = \cos mx$ (§37). Por la ecuación de probabilidad, la probabilidad de éxito es $P_k = (1 - qg_k)/2$, y el éxito seguro es el polo -1000 m-qg. Por ejemplo, con $a = 0{,}1$, $qg_0 = 0{,}8$ y las iteraciones sucesivas dan $+800$, -352, -997 y -206 m-qg: el sesgo atraviesa el polo en $k = 2$ ($P_2 = 0{,}9986$) y luego se aleja (Figura 3.1). En qga el paso es uniforme: $t = 51{,}2$ qga, el ángulo de Bloch de la bandera arranca en $2t = 102{,}4$ qga y avanza $4t = 204{,}8$ qga por iteración; en $k = 2$ llega a $512{,}1$ qga, 12 qga más allá del polo (500 qga).

La estructura de Chebyshev da gratis la información de Fisher de un disparo a profundidad $m = 2k+1$. Como $T_m' = mU_{m-1}$ y $1 - T_m^2 = (1-q^2)U_{m-1}^2$,

$$F_m = \frac{m^2}{1 - qg_0^2}\,:$$

la profundidad multiplica por m^2 la información qg del capítulo 1, de manera uniforme a lo largo de la franja. Es la forma qg del conocido factor $4m^2$ para el ángulo (Suzuki et al. 2020). En la escala del mili-qang, la resolución sobre qg_0 con N disparos a profundidad m es $1000\sqrt{1 - qg_0^2}/(m\sqrt{N})$ m-qg: con $a = 0{,}1$ y 100 disparos, 60 m-qg sin iterar y 12 m-qg a profundidad $m = 5$. Respecto del ángulo inicial de la bandera, la información es m^2 veces la del capítulo 1 sin depender del estado: $m^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 10^{-6}$ qga^{-2}, con una resolución de $159{,}15/(m\sqrt{N})$ qga, es decir, 15,9 qga sin iterar y 3,2 qga a profundidad 5. En términos de la fracción buscada, $1 - qg_0^2 = 4a(1-a)$, de modo que $F_m = m^2/[4a(1-a)]$ y la resolución es $2000\sqrt{a(1-a)}/(m\sqrt{N})$ m-qg.

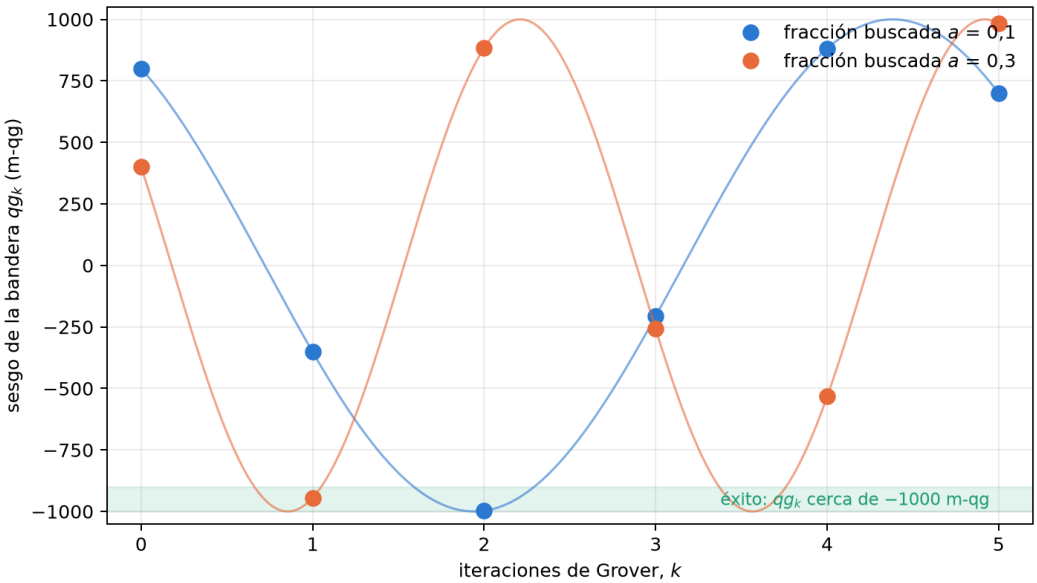


Figura 3.1: La trayectoria de Grover en mili-qang: el sesgo de la bandera muestrea un coseno en los puntos impares $(2k+1)\,2t$. Con $a = 0{,}1$ el éxito llega en $k = 2$; con $a = 0{,}3$ el ángulo es grueso, llega en $k = 1$ y en $k = 2$ ya se pasó del polo.

3.5.1. La trayectoria como oscilación armónica

La formulación del tratado lee $qg_k = \cos\big((2k+1)\,2t\big)$ como un oscilador armónico muestreado: la bandera recorre un coseno a paso angular constante, $4t$ por iteración. Si cada iteración dura Δt, esa es una frecuencia angular de $4t_{qga}/\Delta t$ qga por segundo, es decir, en qHz (Sección 1.11); con $a = 0{,}1$, 204,8 qga por iteración. La imagen tiene una consecuencia útil. En el polo el coseno está en su punto de retorno, donde la velocidad $d\,qg/dk$ se anula: allí el éxito es insensible, a primer orden, a un error de ángulo. Si la bandera queda a δ del polo, $P = \cos^2(\delta/2) \approx 1 - \delta^2/4$. Los 12,1 qga de más de $k = 2$ cuestan sólo 0,14 % de éxito ($P_2 = 0{,}9986$); 25 qga costarían 0,6 %, y 50 qga, 2,4 %. Por eso el redondeo de k^* pesa poco cuando a es chica y mucho cuando el paso es grueso. La distancia geodésica a la solución lo dice en una cifra: tras $k = 2$, $qg_L(qg_2, -1) = 6{,}04$ qga, la mitad del exceso de ángulo de Bloch.

La entropía del resultado recorre el mismo ciclo: qg_S vale $0{,}469$, $0{,}909$, $0{,}016$ y $0{,}969$ bits en $k = 0, \ldots, 3$. Cae casi a cero en el óptimo y vuelve a subir al pasarse. Como las otras magnitudes derivadas, es función de qg_k y no distingue de qué lado del polo está la bandera.

Materia y antimateria: lo que la analogía permite decir. El tratado propone leer la rotación de Grover como un canal de conversión entre materia y antimateria, con el ecuador como «mesón neutro» y la inversión como conjugación de carga. Como afirmación física **no se adopta**: los subespacios marcado y no marcado de una búsqueda no son partícula y antipartícula. Lo que sí es exacto es más modesto. La oscilación de un mesón neutro entre su estado de partícula y el de antipartícula es también una rotación de dos niveles, y su asimetría de mezcla $(N_{\text{sin mezclar}} - N_{\text{mezclados}})/(N_{\text{sin mezclar}} + N_{\text{mezclados}}) = \cos(\Delta m\, t)$, válida cuando las dos anchuras son iguales (Navas et al. 2024), es un qg_Z: tiene ángulo qang $\Delta m\, t$ y barra de error uniforme en ese ángulo, como cualquier lectura del capítulo 1. Grover y el mesón comparten la cinemática, un coseno, y nada más: el mesón además decae. El apéndice G (Apéndice G) da la lectura correcta de la conjugación de carga, que invierte el valor esperado de la matriz β de Dirac.

Dos estados ortogonales, como el marcado y su complemento, están a $qg_L = \pi/2$, es decir, 250 qga, la distancia máxima; una evolución unitaria ideal conserva la pureza ($qg_\tau = 0$) a lo largo de todo el arco.

3.6. Límites analíticos: ángulo grueso y sobreoscilación

El número óptimo de iteraciones es $k^* = \text{round}\big(\frac{\pi}{4t} - \frac{1}{2}\big)$; con t en qga, $k^* = \text{round}\big(125/t_{qga} - \frac{1}{2}\big)$. Cuando la fracción buscada $a = M/N$ es pequeña, t es

pequeño, $k^* \approx \frac{\pi}{4}\sqrt{N/M}$ y el redondeo apenas pesa. Cuando M/N no es despreciable, el ángulo por iteración es *grueso*: el sesgo salta en pasos grandes sobre la curva $\cos((2k+1)2t)$ y puede pasarse del polo. Iterar de más no mejora; empeora, porque la rotación sigue de largo. La lectura qg hace visible ese comportamiento: qg_k recorre un coseno muestreado en puntos impares. Con $a = 0{,}3$, $k^* = 1$ da -944 m-qg ($P = 0{,}972$) y una iteración más salta a $+884$ m-qg ($P = 0{,}058$), la curva naranja de la Figura 3.1.

3.6.1. Señal a ruido y curvatura a lo largo de la trayectoria

La formulación propone leer la trayectoria con dos magnitudes derivadas del capítulo 1: la señal a ruido por disparo $qg_{SNR} = |qg_k|/\sqrt{1 - qg_k^2}$ y la curvatura de información $qg_\kappa = 1/[\ln 2\,(1 - qg_k^2)]$. La Tabla 3.1 las da para $a = 0{,}1$.

Tabla 3.1: La trayectoria de Grover con $a = 0{,}1$ y sus magnitudes derivadas.

iteración k	profundidad m	qg_k (m-qg)	ángulo de Bloch (qga)	éxito P_k	qg_{SNR}	qg_κ
0	1	$+800{,}0$	102,4	0,1000	1,33	4,01
1	3	$-352{,}0$	307,2	0,6760	0,38	1,65
2 (óptimo)	5	$-997{,}1$	512,1	0,9986	13,15	250,8
3 (se pasó)	7	$-206{,}4$	716,9	0,6032	0,21	1,51

Junto al polo las dos se disparan, y la formulación propone usarlas como detector de proximidad polar para cortar las iteraciones antes de la sobreoscilación. Hay dos precisiones. Primero, son funciones de qg_k: un umbral sobre qg_{SNR} o sobre qg_κ es un umbral sobre $|qg_k|$, y no distingue si la bandera llegó al polo o ya lo pasó. En $k = 2$ está 12 qga más allá del polo, y ambas valen lo mismo que 12 qga antes. Lo que dice si conviene otra iteración es la fórmula de k^*, no la magnitud. Segundo, leerlas cuesta disparos: medir la bandera destruye el estado, de modo que cada k consultado es una corrida aparte. El uso que sí aportan es el del capítulo 1: qg_{SNR} dice cuántos disparos hacen falta para confirmar el signo de la lectura final, $N = (3/qg_{SNR})^2$, es decir, un disparo en $k = 2$ y 64 en $k = 1$.

3.6.2. Grover con ruido

Con compuertas ruidosas el cuadro cambia, y es útil registrarlo tal como resultó (§63). En búsquedas de 4 a 6 qubits, con cada Z multicontrolada compilada en 14, 36 y 84 CNOT y ruido despolarizante en cada CNOT:

- **El ruido adelanta la mejor iteración y consume la ventaja.** Con $n = 6$ y $p_2 = 0{,}005$ la mejor iteración pasa de 4 a 1 y el costo por éxito verificado sube de 6,1 a 27,6 llamadas al oráculo, frente a 32 de la búsqueda clásica.
- **La fórmula qg falla bajo ruido de compuerta.** Si los resultados no buscados fueran uniformes, cada qubit tendría $qg_{Z,i} = \pm(NP - 1)/(N - 1)$, y los signos darían la respuesta y la magnitud la probabilidad de éxito sin conocerla. El ruido despolarizante no es uniforme tras el difusor, y la estimación sin etiquetas resultó peor que la frecuencia del resultado más común en todos los casos.
- **Leer la respuesta por signos pierde.** Con $n = 5$, 100 disparos encuentran el elemento marcado el 66 % de las veces con los signos qg y el 91 % con la cadena de bits más frecuente.

El balance honesto: en la búsqueda de Grover el histograma de resultados es mejor estimador que la lectura qg por qubit. qg aporta la imagen de Chebyshev y el factor de información, no un estimador superior. La versión de trabajo del autor propone además una energía variacional regularizada para circuitos de reflexión y una función de radiación que seguiría a P_k durante la amplificación; son las propuestas abiertas del capítulo 1 (Sección 1.12), **sin verificar**.

3.7. Estimación de amplitud

Donde la estructura de Chebyshev sí rinde es en la *estimación de amplitud*: usar profundidades crecientes para estimar a con menos consultas al oráculo que el muestreo directo. Con la estimación de máxima verosimilitud (profundidades 0, 1, 2, 4, …, 100 disparos cada una), sin ruido, el error cae como consultas$^{-0{,}93\ldots-1{,}12}$ frente a consultas$^{-0{,}5}$ del Monte Carlo, y es 8,4–9,3 veces menor con 26 200 consultas (§37).

El ruido pone límites. Con despolarización $p = 0{,}01$ por iteración, una verosimilitud que ignora el ruido termina peor que Monte Carlo ($6{,}8 \cdot 10^{-3}$ frente a $2{,}7 \cdot 10^{-3}$), mientras que una que lo incluye conserva una ventaja de 4×. Con $p = 0{,}05$, ni siquiera la verosimilitud con ruido supera a Monte Carlo: más allá de una profundidad del orden de $1/p$ las iteraciones casi no aportan señal.

El déficit disipativo del capítulo 1 pone ese límite en la escala qg. En el modelo de visibilidad de la verosimilitud, cada iteración acorta el vector qg de la bandera en un factor V; tras k iteraciones la franja tiene amplitud V^k y

$$qg_\tau = \sqrt{1 - V^{2k}}.$$

Con $V = 1-p$, $V^k \approx e^{-kp}$: hacia $k \approx 1/p$ la franja cae a $1/e$ de su amplitud y qg_τ pasa de $0{,}93$, de modo que las iteraciones siguientes agregan profundidad sobre un estado casi mezclado. Con una visibilidad de $0{,}975$ por iteración, el centro del rango que se ajusta en IonQ (párrafo siguiente), qg_τ vale $0{,}63$ tras 10 iteraciones y $0{,}80$ tras 20. Es la misma frontera de la profundidad $1/p$, leída como pérdida de pureza.

En el simulador con ruido calibrado de IonQ (3 qubits, $a = 0{,}3$, 36 000 consultas), la estimación fue precisa, con error cuadrático medio de 0,0005–0,0015 y visibilidad ajustada de 0,965–0,985 por iteración, y entre 7 y 30 veces mejor que un Monte Carlo realista, cuyo circuito de profundidad cero está sesgado por el ruido del dispositivo (§39).

3.8. Sin qang y con qang

Tabla 3.2: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
probabilidad de transición entre dos estados	$\lvert\langle\psi\rvert\phi\rangle\rvert^2$	$(1 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)/2$, con ángulo qang igual al ángulo entre los estados y lectura $1000\,\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ m-qg	**ninguna en el valor**; qang lo vuelve geométrico
trayectoria de Grover	$\sin^2((2k+1)\theta_0)$	$qg_k = T_{2k+1}(qg_0)$, éxito en -1000 m-qg	**equivalente**; la forma de Chebyshev muestra que la resolución en m-qg mejora un factor m con la profundidad

acción	sin qang	con qang	diferencia
distancia entre dos estados	$\arccos\lvert\langle\psi\vert\phi\rangle\rvert$	$qg_L = \gamma/2$, que en un meridiano común sale de dos histogramas en Z	**conveniencia**; con azimutes distintos la lectura en Z no basta
decidir cuándo dejar de iterar	k^* por la fórmula	umbral sobre qg_{SNR} o qg_κ	**ninguna**: son funciones de $\lvert qg_k\rvert$ y no ven si se pasó el polo; la fórmula de k^* sí
leer la búsqueda con ruido	histograma de cadenas de bits	lectura qg por qubit	**en contra**: la lectura qg pierde frente al histograma
estimar una amplitud con ruido	máxima verosimilitud sobre conteos	la misma, con el ruido escrito en la verosimilitud qg	**a favor** hasta una profundidad cercana a $1/p$, no más allá

Balance. Las identidades del capítulo son exactas, pero ninguna da un número que no se obtenga con la amplitud habitual. La única comparación con ruido real del capítulo es desfavorable para la lectura qg, y queda escrita así.

3.9. En código

```
from qang import algebra, probability

algebra.householder_qg(0.45)      # -0.45 Z - 0.893 X, una reflexión: H @ H = I
algebra.grover_diffuser_qg(0.45)    # +0.45 Z + 0.893 X
P = algebra.transition_probability(0.3, -0.5)      # 0.838, mismo meridiano
algebra.transition_probability(0.3, -0.5, 0.0, 1.2)  # con azimutes distintos
probability.readings_from_p0(P)    # theta = 0.828 rad (el ángulo entre los estados), +67
algebra.geodesic_distance(0.3, -0.5)            # qg_L = 0.414 rad (65.9 qga) = gamma / 2

qg_2 = algebra.chebyshev_trajectory(0.8, 2)       # -0.9971 (-997 m-qg, P = 0.9986), a = 
probability.quantum_snr(qg_2)                         # 13.15
probability.information_curvature(qg_2)               # 250.8
```

```
algebra.grover_fisher_information(0.8, 5)        # 69.4 por disparo: 25 veces la de m = 1
algebra.geodesic_distance(qg_2, -1.0)           # 0.038 rad (6.04 qga) hasta la solución
```

3.10. Resumen

- La matriz de transición de una compuerta es racional en q, pero no se compone como la compuerta: la diferencia entre $q_1 q_2$ y $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ es la interferencia.
- El reflector de Householder y el difusor de Grover son $\mp(q\,\sigma_z + \sqrt{1-q^2}\,\sigma_x)$.
- La probabilidad de transición entre dos estados es $(1 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)/2$; en un mismo meridiano depende solo de los sesgos polares. Leída con la ecuación del capítulo 1, su ángulo qang es el ángulo entre los estados y su lectura es $1000\,\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ m-qg. La distancia geodésica es $qg_L = \gamma/2$.
- La trayectoria de Grover es $qg_k = T_{2k+1}(qg_0)$, con éxito seguro en -1000 m-qg, y la información de Fisher a profundidad m es $m^2/(1-qg_0^2)$: la resolución en m-qg mejora en un factor m.
- qg_{SNR} y qg_κ se disparan junto al polo, pero como criterio de parada no ven si la bandera ya lo pasó; lo que aportan es el número de disparos para confirmar el signo de la lectura final.
- La trayectoria es un coseno muestreado: en el polo está en su punto de retorno, de modo que un exceso de 12 qga cuesta sólo 0,14 % de éxito. La lectura materia–antimateria de la rotación no se adopta; lo exacto es que la asimetría de mezcla de un mesón neutro, $\cos(\Delta m\, t)$, es un qg_Z.
- Con ruido, la lectura qg por qubit pierde frente al histograma en la búsqueda; en la estimación de amplitud la ventaja se mantiene si el ruido entra en la verosimilitud, y termina cerca de la profundidad $1/p$, donde el déficit disipativo de la bandera, $qg_\tau = \sqrt{1 - V^{2k}}$, pasa de $0{,}93$.

Notas bibliográficas

El reflector es el de Householder (1958). La búsqueda de Grover es Grover (1996), y la amplificación y estimación de amplitud, Brassard et al. (2002); la estimación por máxima verosimilitud sin estimación de fase es Suzuki et al. (2020). La probabilidad de transición entre estados qg es la distancia de Wootters (1981). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

4 Estadística de muestreo, inferencia bayesiana y la distribución de Haar

Cada número que entrega un procesador cuántico es una estimación hecha con un número finito de disparos. Este capítulo reúne las herramientas estadísticas de la unidad qg: cómo se propaga el ruido de disparo, qué distribución previa es la natural para un qubit desconocido, cómo construir intervalos que no colapsan cerca de los polos, cómo corregir los sesgos de las cantidades cuadráticas y cuántos disparos hace falta planificar. Todas se apoyan en la base del capítulo 1: lo que se estima es siempre la probabilidad p_0, y como el mili-qang es lineal en ella, cada intervalo y cada plan de disparos se expresa directamente en m-qg. Cierra con el fundamento matemático que explica por qué qg_Z es la lectura canónica.

4.1. Propagación del ruido de disparo

Con N disparos y k_0 resultados 0, el estimador natural es $\widehat{qg}_Z = 2k_0/N - 1$. Es insesgado y su varianza es exactamente

$$\mathrm{Var}(\widehat{qg}_Z) = \frac{1 - qg_Z^2}{N} = \frac{\sin^2\theta}{N},$$

que alcanza la cota de Cramér–Rao del parámetro qg_Z: no hay estimador insesgado mejor con la misma información. En mili-qang es la resolución $\sigma_m = 1000\sqrt{1 - qg_Z^2}/\sqrt{N}$ del capítulo 1 (Figura 1.3). Propagada al ángulo por el método delta, la varianza se vuelve constante, $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \approx 1/N$, como se vio en el capítulo 1 (§5). Las dos afirmaciones son compatibles: qg_Z es la coordenada *curva*, con información de Fisher $1/(1 - qg_Z^2)$ por disparo, y θ la coordenada *plana*, con información 1 (capítulo 23).

El método delta es una aproximación de primer orden y falla donde la derivada se anula. Cerca de un polo, $\widehat{qg}_Z$ vale exactamente ± 1 en una fracción apreciable de los experimentos, y el error estándar estimado $\sqrt{(1 - \widehat{qg}_Z^2)/N}$ se vuelve cero: el intervalo colapsa justo donde el estado es más extremo.

4.1.1. La fase azimutal

La fase se estima con las dos bases transversales, $\hat{\varphi} = \operatorname{atan2}(\widehat{qg}_Y, \widehat{qg}_X)$ (Sección 1.4). Con N disparos en cada base, el método delta da

$$\operatorname{Var}(\hat{\varphi}) \approx \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\,\sin^2 2\varphi}{N\sin^2\theta} \;\le\; \frac{1}{N\sin^2\theta}.$$

La cota de la derecha, que es la que usa la versión de trabajo del autor, es exacta sobre los ejes (φ múltiplo de $90°$) y cerca de los polos, pero en el ecuador a $\varphi = 45°$ duplica la varianza real. Lo esencial no cambia: la fase se vuelve inobservable al acercarse a un polo, donde $\sin\theta \to 0$. En la escala angular del capítulo 1, en el ecuador y sobre un eje, la desviación es $159{,}15/\sqrt{N}$ qga, igual que la del ángulo polar. La lectura transversal $\widehat{qg}_X = \sin\theta\cos\varphi$, en cambio, no diverge: su varianza es $(1 - qg_X^2)/N \le 1/N$, por la misma razón que la de $\widehat{qg}_Z$.

4.2. La distribución de Haar en espacio qg

¿Qué se sabe de un qubit antes de medirlo? Si su estado es "cualquiera", la distribución natural es la medida de Haar, la única invariante ante rotaciones. En unidades qg tiene una forma notable: qg_Z **es uniforme en** $[-1, 1]$. Es el teorema de la caja de sombrero de Arquímedes: el área de una franja de la esfera entre dos latitudes es proporcional a la diferencia de alturas, no de ángulos. Se comprobó con 200 000 estados de Haar (§15).

La consecuencia estadística es directa. Una previa uniforme en qg_Z equivale a $p_0 \sim \text{Beta}(1, 1)$, y con k_0 ceros en N disparos la posterior es

$$p_0 \mid k_0 \;\sim\; \text{Beta}(k_0 + 1,\; N - k_0 + 1),$$

de la que se obtiene un intervalo de credibilidad para $qg_Z = 2p_0 - 1$ con solo una función beta (`bayes_qg_estimate`, implementada sin dependencias externas y verificada contra `scipy.stats.beta`).

La ecuación de probabilidad del capítulo 1 explica por qué esta previa es tan simple. Como $m = 2000\,p_0 - 1000$ es lineal, una distribución uniforme en qg_Z es uniforme en mili-qang y uniforme en p_0: los tres enunciados son el mismo. En el ángulo, en cambio, la misma medida tiene densidad $\frac{1}{2}\sin\theta$ y se concentra en el ecuador (Figura 4.1). La previa "no informativa" depende de la escala en la que se la escribe, y la de Haar es plana exactamente en la escala en la que se mide.

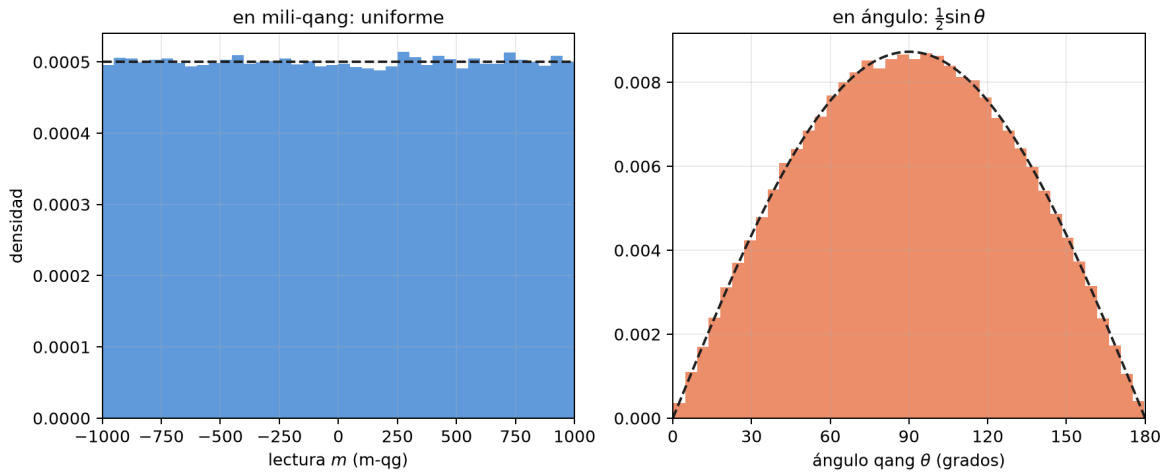


Figura 4.1: Doscientos mil estados de Haar leídos en mili-qang (izquierda) y en ángulo (derecha). La línea punteada es la densidad teórica: $1/2000$ por m-qg y $\frac{1}{2}\sin\theta$ en el ángulo.

4.3. Intervalos exactos cerca de los polos

La comparación con 50 disparos muestra dónde importa la elección del intervalo (§15):

Tabla 4.1: Cobertura de intervalos de 95 % con 50 disparos.

caso	método delta	Wilson	Bayes–Haar
cerca de un polo ($\theta = 0{,}08$): cobertura del intervalo de 95 %	7,6 %	92,4 %	92,4 %
estados aleatorios de Haar: cobertura	89,8 %	95,1 %	94,9 %

Cerca del polo el método delta cubre el valor verdadero en menos de uno de cada diez experimentos; Wilson y la posterior de Haar recuperan la cobertura nominal. Sobre estados de Haar, la media posterior tiene un error cuadrático 4 % menor que la frecuencia cruda.

La Figura 4.2 muestra la causa en mili-qang. Con 50 disparos, el ancho del intervalo del método delta cae a cero en los extremos de la escala: con 50 ceros

en 50 disparos da $[+1000, +1000]$ m-qg, un intervalo sin ancho. Con 48 ceros da $[+811, +1029]$ m-qg, que se sale de la escala por arriba. Wilson da $[+731, +978]$ y Bayes–Haar $+885$ $[+731, +975]$ m-qg: anchos que no colapsan y quedan dentro de $[-1000, +1000]$.

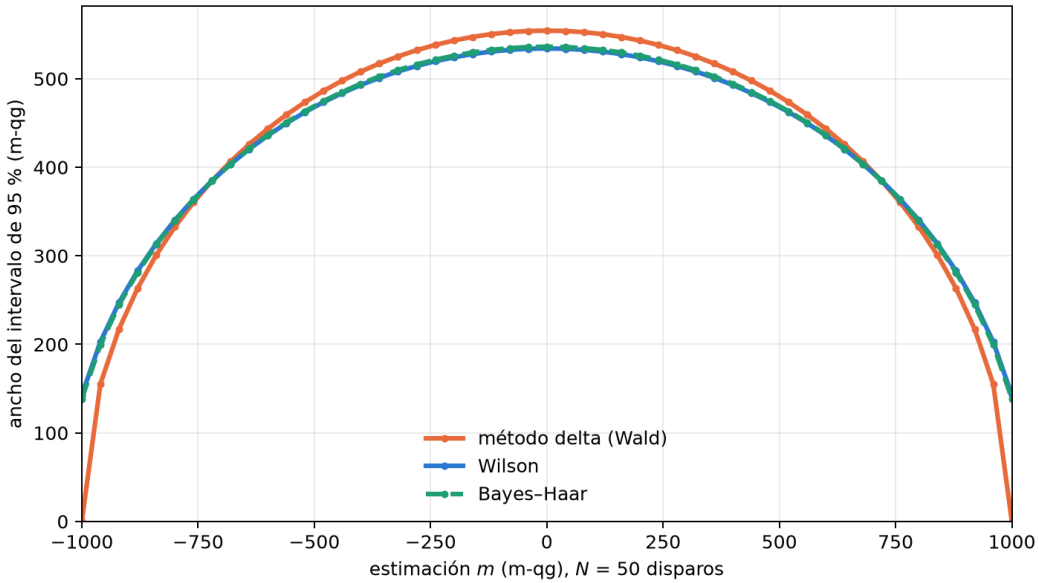


Figura 4.2: Ancho del intervalo de 95 % con 50 disparos, en mili-qang, según la estimación. El método delta colapsa en los polos; Wilson y Bayes–Haar no.

La lectura honesta de la tabla tiene dos partes. La previa de Haar repara el colapso del método delta y tiene una justificación geométrica limpia; pero el intervalo de Wilson, estándar en estadística, logra la misma cobertura, y la ganancia sobre una buena práctica frecuentista está en la estimación puntual y es modesta. **La unidad qg no reduce el número de disparos que exige una precisión dada**; lo que aporta es hacer explícito el costo y elegir bien el intervalo.

4.4. Estimadores insesgados de segundo orden

Las cantidades cuadráticas tienen un sesgo sistemático. El estimador directo $\widehat{qg}^{\,2}$ sobreestima qg^2 en $(1-qg^2)/N$, porque el ruido de disparo siempre suma varianza. La corrección es exacta:

$$\widehat{qg^2} = \frac{N\,\widehat{qg}^{\,2} - 1}{N - 1}, \qquad \mathbb{E}\big[\widehat{qg^2}\big] = qg^2,$$

válida para $N \geq 2$ (`qg2_unbiased`). Puede dar valores negativos cuando $qg \approx 0$, el precio de ser insesgado. Con $N = 20$ y $qg = 0{,}6$, el estimador directo promedia 0,390 y el corregido 0,358, frente al valor verdadero 0,36.

Importa porque el radio de Bloch del capítulo 5, $r^2 = qg_X^2 + qg_Y^2 + qg_Z^2$, es una suma de cuadrados: sin la corrección, cada eje suma su sesgo y un estado entrelazado parece más puro de lo que es (§97). La misma corrección interviene en la lectura del corrimiento gravitatorio con dos relojes (§126, capítulo 8).

4.5. Planificar los disparos

La relación inversa, cuántos disparos hacen falta para un error dado, es la que se usa al preparar un experimento. `plan_shots` convierte un error estándar objetivo del qg_Z filtrado en disparos y en segundos estimados de procesador, teniendo en cuenta la fracción de disparos que el filtro va a conservar (§143). Para un objetivo de 0,02 (20 m-qg) en dos circuitos por dispositivo planificó 3000–3400 disparos, y en 30 repeticiones el error del peor qubit fue 0,021–0,023 (21–23 m-qg): el plan cumplió. Como referencia, la fórmula del capítulo 1 sin filtro da $N = (1000 \sin\theta/\delta)^2 = 2500$ disparos para 20 m-qg en el ecuador; el plan pide más porque descuenta los disparos que el filtro va a descartar. La regla simple es $N_{\text{ejecución}} = N/(1 - P_{\text{descarte}})$: con un 20 % de descarte, los 2500 disparos útiles piden 3125.

La predicción por qubit, en cambio, resultó 1,4–1,6 veces optimista en promedio, y su análisis es instructivo: los qubits que fallaron eran los cercanos a un polo ($|qg| > 0{,}8$, con cocientes de 2,4–3,1), cuyo qg_Z el ruido aleja de ± 1 y cuya varianza real es mayor que la ideal. El plan usa el peor qubit y por eso cumple; la opción segura, sin suponer el valor de qg, es planificar para el caso peor, $qg = 0$. La versión de trabajo del autor atribuye ese exceso a la curvatura $\kappa_{qg} = 1000\,|qg_Z|$ del capítulo 1, máxima en los polos: un error aleatorio de pulso corre la lectura hacia el ecuador en proporción a κ_{qg}, y ahí la varianza binomial es mayor. Es una interpretación coherente con el capítulo 1, pero **no se probó** sobre los datos de §143.

4.6. Tomografía con pocos disparos y sombras clásicas

El vector de Bloch completo es (qg_X, qg_Y, qg_Z), uno por eje de medición. Con 10 disparos por eje se compararon seis estimadores sobre 2000 estados (§35). La versión qg aplica la previa de Haar eje por eje, $\hat{r}_a = (2k_a - N)/(N+2)$, y proyecta sobre la bola:

Tabla 4.2: Error cuadrático medio del vector de Bloch con 10 disparos por eje.

conjunto de estados	inversión lineal	inv. + proyección	máx. verosimilitud	**qg-Haar**	Jeffreys
puros de Haar	0,203	0,157	0,150	0,165	0,159
mixtos uniformes	0,247	0,211	0,210	**0,185**	0,196
puros cerca de un polo	0,199	0,159	0,109	0,163	0,159
muy mixtos ($\lvert r\rvert < 0{,}3$)	0,298	0,293	0,293	**0,208**	0,245

La inversión lineal da estados no físicos en 52–88 % de las corridas sobre estados puros. Sobre estados mixtos el estimador qg-Haar es la mejor fórmula cerrada (12–29 % por debajo de máxima verosimilitud); sobre estados puros, su contracción hacia el centro es un error, y pierde frente a máxima verosimilitud, hasta 50 % cerca de un polo. La previa adecuada depende de qué estados se esperan.

¿Convendría medir con *sombras clásicas* (mediciones de Pauli aleatorias) en lugar de medir directamente las bases? Para las cantidades que qang usa, no (§62). Con varianzas exactas por disparo sobre estados de 6 qubits, las sombras necesitan 3–41 veces más disparos para el mismo error: 3,0–4,3× para todos los qg_Z, 5,8–8,1× para el testigo de peso medio del registro, 9–12,6× para todos los correladores ZZ y 41× para el desbalance filtrado. Solo igualan a la medición directa cuando el objetivo son todas las cantidades de uno y dos qubits a la vez. Y el filtro por disparo no existe con sombras: solo $3^{-6} = 0{,}14\,\%$ de los disparos aleatorios tienen todos los qubits medidos en Z.

4.7. El fundamento: Riesz–Fréchet

Queda una pregunta conceptual: ¿por qué qg_Z y no otra función de las poblaciones? Los operadores de un registro de n qubits forman un espacio de Hilbert de dimensión finita con el producto de Hilbert–Schmidt $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$, y las matrices densidad viven en él. El teorema de representación de Riesz–Fréchet dice que todo funcional lineal continuo f sobre un espacio de Hilbert tiene la forma $f(x) = \langle y_f, x\rangle$ para un único y_f; en dimensión finita la continuidad es automática y el teorema se reduce a álgebra lineal (apéndice F).

La aplicación es inmediata. $\rho \mapsto qg_Z(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho\,\sigma_z)$ es lineal en ρ, así que tiene un único representante, σ_z. Toda lectura lineal de un estado (un valor esperado, una población, un promedio por disparo) es de esa forma, y qg_Z es aquella cuyo representante es el observable Z. En cambio $qg_S(\rho) = H(\langle 0|\rho|0\rangle)$ es estrictamente cóncava en ρ: no hay operador que la represente. De ese hecho estructural se siguen dos propiedades ya vistas: los funcionales lineales tienen estimadores insesgados por promedio muestral y la entropía no (desigualdad de Jensen), y la identidad $qg_S = H((1+qg_Z)/2)$ muestra que qg_S no contiene información sobre el estado que el representante de qg_Z no extraiga ya.

El mili-qang hereda esta propiedad: $m(\rho) = 1000\ \mathrm{Tr}(\rho\,\sigma_z)$ también es lineal, con representante $1000\,\sigma_z$, y por eso su estimador es el promedio de los disparos, sin sesgo. Es la razón de fondo por la que el capítulo 1 definió la unidad sobre la probabilidad y no sobre el ángulo: $\theta = \arccos(qg_Z)$ no es lineal en ρ, no tiene representante y su estimador directo tiene sesgo. Lo mismo vale para el ángulo en la escala qga del capítulo 1: es el mismo θ multiplicado por $1000/2\pi$, de modo que la escala angular cambia la unidad del ángulo pero no lo vuelve lineal en ρ.

Propuestas abiertas. La versión de trabajo del autor agrega a este capítulo tres propuestas que el libro registra **sin verificar**: vigilar la información de Fisher $qg_F = 4000\ \mathrm{Var}(\sigma_z)$ para que un ansatz no se acerque a un 2-diseño de Haar global (que la medida de Haar sobre todo $SU(2^n)$ produce mesetas estériles es un resultado conocido (McClean et al. 2018); que qg_F sirva para vigilarlo, no); fórmulas de propagación del ruido de disparo para la energía regularizada y la función de radiación del capítulo 1, que dependen de penalizaciones todavía sin definir; y que el gradiente natural en qg diagonalice de forma canónica el tensor de Fubini–Study, que sólo es cierto para las coordenadas (θ, φ) de un qubit (Sección 1.4).

4.8. Las magnitudes derivadas en el muestreo

La formulación del tratado lleva al muestreo las magnitudes derivadas del capítulo 1 (Sección 1.11). Todas se estiman desde los mismos conteos, y cada una hereda una propiedad estadística de este capítulo.

Dos informaciones de Fisher. Un disparo lleva sobre el sesgo polar la información $F_{qg} = 1/(1 - qg_Z^2)$, que diverge en los polos, y sobre el ángulo qang $F_\theta = 1$, constante. Son la misma información en dos coordenadas, y la curvatura de información es la primera en bits: $qg_\kappa = F_{qg}/\ln 2$.

Señal a ruido y curvatura con todos los disparos iguales. Los estimadores directos de qg_{SNR} y qg_κ dividen por $1 - \widehat{qg}_Z^{\,2}$ y se vuelven infinitos cuando los N disparos coinciden, que es justamente el caso de la Sección 4.3. La media posterior de Bayes–Haar los mantiene finitos: con 50 de 50, $qg_Z = 50/52 = 0{,}962$, $qg_{SNR} = 3{,}50$ y $qg_\kappa = 19{,}1$.

La distancia geodésica entre dos muestras. Con N_1 y N_2 disparos, cada ángulo qang tiene varianza $1/N$, de modo que

$$\widehat{qg}_L = \frac{|\hat\theta_1 - \hat\theta_2|}{2}, \qquad \operatorname{Var}\left(\widehat{qg}_L\right) \approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right),$$

sin depender de dónde estén los dos estados. Es la mitad de la h de Cohen, el tamaño de efecto clásico para comparar dos proporciones, así que la prueba no es de qang: qang le da el nombre de distancia. Con 750 y 700 ceros en 1000 disparos cada una, $\widehat{qg}_L = 0{,}056$ rad (8,9 qga) con error estándar $0{,}0224$: una diferencia de 2,5σ. Vale lo dicho en el capítulo 1: en un meridiano común es la distancia de Fubini–Study; con azimutes distintos, una cota inferior.

El déficit disipativo desde conteos. $qg_\tau = \sqrt{1 - r^2}$ es una cantidad cuadrática, y hereda el sesgo de la Sección 4.4 con el signo opuesto. Con N disparos por eje, el radio directo cumple

$$\mathbb{E}\big[\hat r^{\,2}\big] = r^2 + \frac{3 - r^2}{N},$$

de modo que el ruido de disparo hace parecer al estado más puro de lo que es. Un estado puro medido con 100 disparos por eje promedia $\hat r^{\,2} = 1{,}02$, fuera de la esfera. Un estado con $r = 0{,}9$ ($qg_\tau = 0{,}436$) promedia $\hat r^{\,2} = 0{,}832$ con el estimador directo y $0{,}810$ con el corregido, que es el valor verdadero. La raíz, en cambio,

no queda insesgada ni siquiera con la corrección: $\widehat{qg}_{\tau}$ promedia $0{,}376$ con el radio directo y $0{,}404$ con el corregido, los dos por debajo de $0{,}436$, porque la raíz es cóncava y se recorta en cero. La formulación propone $\sqrt{\max(0, 1 - \hat{r}^{\,2})}$ como estimador insesgado; el corregido reduce el sesgo a la mitad, no lo elimina.

4.9. Sin qang y con qang

Tabla 4.3: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
intervalo de confianza cerca de un polo	método delta: cobertura por debajo de 10 %	Bayes–Haar, Beta$(1, 1)$: uniforme en m-qg, cobertura nominal	**a favor del método, no sólo de qang**: el intervalo de Wilson, sin qang, también la recupera; qang justifica la previa (Haar es uniforme en m-qg)
cantidades cuadráticas (radios, qg^2)	elevar al cuadrado la estimación: sesgo hacia arriba	$(N\widehat{qg}^{\,2} - 1)/(N - 1)$	es el **estimador insesgado estándar**; qang lo empaqueta y lo aplica en todos los capítulos
cuántos disparos medir	varianza binomial del estado	$N = (1000 \sin\theta/\delta)^2$ para resolver δ m-qg	**equivalente**; la fórmula en m-qg es la que se usa para planificar
comparar dos lecturas	h de Cohen	$qg_L = h/2$, con varianza $\frac{1}{4}(1/N_1 + 1/N_2)$ en todo el círculo	**ninguna**: es la misma prueba, con nombre de distancia
estimar la falta de pureza	$1 - \mathrm{Tr}\,\rho^2$ con tomografía	qg_{τ} con cuadrados insesgados	el sesgo de $\hat{r}^{\,2}$ desaparece; el de $\widehat{qg}_{\tau}$ baja a la mitad, **no se elimina**

acción	sin qang	con qang	diferencia
medir cantidades qang	sombras clásicas	medición directa en Z	3–41 veces menos disparos, pero es una **elección de medición**, no un efecto de la unidad
justificar la lectura	—	Riesz–Fréchet: qg_Z es la lectura lineal canónica	**a favor**: explica por qué se promedia qg_Z y no el ángulo

Balance. La estadística del capítulo es estadística clásica de proporciones. qang aporta la elección de coordenada (uniforme bajo Haar, lineal por Riesz–Fréchet) que dice qué previa usar y qué promediar; la mejora de cobertura existe también sin qang.

4.10. En código

```
import math
from qang import probability, proportions, statistics

statistics.bayes_qg_estimate(48, 50)    # posterior de Haar: qg_Z 0.885, intervalo [0.73
statistics.wilson_qg_estimate(48, 50)    # la alternativa frecuentista
statistics.qg2_unbiased(16, 20)          # qg^2 sin el sesgo (1 - qg^2)/N
statistics.radius2_estimate([(77, 100), (50, 100), (86, 100)])  # r^2 insesgado y su err
proportions.cohens_h(0.75, 0.70) / 2    # qg_L entre dos lecturas: 0.056 rad

probability.analyze(48, 50).milliqang   # (920.0, 730.8, 977.9) m-qg con el intervalo de
probability.shots_for_resolution(20, math.pi / 2)  # 2500 disparos para 20 m-qg en el ecu
```

4.11. Resumen

- $\widehat{qg}_Z$ es insesgado y alcanza la cota de Cramér–Rao; el método delta colapsa cerca de los polos, donde su intervalo en m-qg pierde el ancho o se sale de la escala.

- Bajo la medida de Haar, qg_Z es uniforme en $[-1, 1]$, es decir, uniforme en mili-qang y en p_0; la previa correspondiente es Beta$(1, 1)$ y da intervalos exactos con una función beta.
- Wilson y Bayes–Haar recuperan la cobertura nominal donde el método delta cubre menos de 10 %; ninguno reduce los disparos necesarios.
- Las cantidades cuadráticas necesitan la corrección $(N\widehat{qg}^{\,2} - 1)/(N-1)$; sin ella, los radios de Bloch se sobreestiman.
- De las magnitudes derivadas, qg_L entre dos muestras es la mitad de la h de Cohen, con varianza $\frac{1}{4}(1/N_1 + 1/N_2)$; qg_τ estimado de conteos queda sesgado hacia abajo aun con la corrección cuadrática.
- Planificar con el peor qubit cumple el objetivo; los qubits cerca de un polo son los que el ruido más aleja.
- Para las cantidades de qang, medir directamente en Z cuesta 3–41 veces menos disparos que las sombras clásicas.
- qg_Z, y con él el mili-qang, es la lectura lineal canónica por el teorema de Riesz–Fréchet; qg_S y el ángulo no son lineales y no tienen representante.

Notas bibliográficas

La cota de Cramér–Rao está en Cramér (1946) y Rao (1945), y la previa invariante, en Jeffreys (1946). El intervalo de puntaje es Wilson (1927). Para muestrear la medida de Haar, véase Mezzadri (2006); las sombras clásicas son Huang et al. (2020). El teorema de representación de Riesz–Fréchet es Riesz (1907) y Fréchet (1907). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte II

II. Geometría local, óptica cuántica y fases geométricas

5 El radio local de Bloch como medida de pureza y entrelazamiento

La Parte I trató al qubit como un punto de la superficie de la esfera: un estado puro, una probabilidad p_0 y sus cuatro lecturas. Un qubit que forma parte de un registro casi nunca es puro: está mezclado por el ruido o por su entrelazamiento con los demás, y se ubica *dentro* de la esfera. Este capítulo agrega a la base del capítulo 1 la cantidad que falta, el **radio local** r, y muestra que la ecuación de probabilidad sigue valiendo con un solo cambio: el sesgo polar ya no es $\cos\theta$ sino $r\cos\theta$. Del radio salen una medida de entrelazamiento, una forma de separar la dirección del estado de su pureza y la dualidad onda–partícula, todo leído en unidades qg.

5.1. La ecuación de probabilidad con radio

Para un qubit en un estado mixto, su vector de Bloch (qg_X, qg_Y, qg_Z) tiene longitud $r \le 1$, y la regla de Born en la base Z se escribe

$$p_0 = \frac{1 + qg_Z}{2} = \frac{1 + r\cos\theta}{2}.$$

Es la ecuación de probabilidad del capítulo 1 con el radio adentro: las lecturas $qg_Z = 2p_0 - 1$ y $m = 2000\,p_0 - 1000$ m-qg no cambian, pero ya no determinan el ángulo, porque un mismo p_0 puede venir de un estado puro inclinado o de uno mezclado más cerca del polo. Cada eje tiene su propia probabilidad, $p_0^{(a)}$ en la base $a \in \{X, Y, Z\}$, y el radio cuadrado es la suma de las tres lecturas al cuadrado (§97):

$$r^2 = qg_X^2 + qg_Y^2 + qg_Z^2 = \frac{m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2}{10^6} = 2\,\mathrm{Tr}\,\rho^2 - 1.$$

El radio es lineal en la pureza $\mathrm{Tr}\,\rho^2$: vale 1 en la superficie (estado puro) y 0 en el centro (estado máximamente mezclado). La esfera de radio r tiene área $4\pi r^2$,

y el **déficit de superficie** $4\pi(1-r^2)$ es el área que el qubit perdió; la biblioteca trabaja con $1-r^2$, que lleva la misma información.

5.2. El déficit como medida de entrelazamiento

Si el registro completo está en un estado puro, todo lo que le falta de radio a un qubit se debe a su entrelazamiento con el resto. En ese caso $1-r_q^2 = 4\det\rho_q$ es el *one-tangle* del qubit q, que para dos qubits es la concurrencia al cuadrado (Coffman et al. 2000), y su promedio sobre los qubits es el entrelazamiento global de Meyer y Wallach (2002):

$$Q = \frac{1}{n}\sum_{q}\left(1-r_q^2\right).$$

Dos ejemplos fijan la escala. En el estado de Bell cada qubit está en el centro de su esfera, $r=0$, y $Q=1$. En el estado W de 3 qubits cada uno tiene $r^2=1/9$ y $Q=0{,}889$. Si el estado global es mixto, el déficit mezcla entrelazamiento y ruido y no puede separarlos: el radio mide entrelazamiento solo cuando se sabe, o se garantiza, que el registro es puro. Leer r^2 cuesta tres configuraciones de medición para todo el registro (todos los qubits en X, en Y y en Z), no tres por qubit.

5.3. El radio ante las compuertas y los algoritmos

Una compuerta de un qubit rota la esfera y conserva el radio, también para qubits mixtos. SWAP intercambia los radios de dos qubits. CNOT, CZ, iSWAP, Toffoli y Fredkin pueden llevar un qubit de una entrada producto al centro ($r=0$, desde entradas del tipo $|+0\rangle$ o $|{+}{+}\rangle$) y también devolverlo a la superficie; sobre estados de la base computacional no crean déficit, porque actúan como permutaciones clásicas (§97). En los algoritmos, el radio de los qubits de lectura dice dónde está la respuesta:

Tabla 5.1: El radio de los qubits de lectura en algoritmos estándar (§97).

algoritmo	r^2 de los qubits de lectura	lectura
Bernstein–Vazirani, Deutsch–Jozsa constante	1 en cada qubit	salida producto: el qg_Z local es toda la respuesta
Simon ($s = 110$)	0 en cada qubit	la respuesta está entera en las correlaciones
Grover ($n = 5$), $k = 0 \dots 4$	$1 \to 0{,}82 \to 0{,}66 \to 0{,}84 \to 0{,}998$	entrelaza y desentrelaza; vuelve a 1 en el óptimo
conteo ($N = 16$, $M = 3$)	$(1 - 2M/N)^2 = 0{,}39$	déficit $4(M/N)(1 - M/N) = 0{,}61$
QAOA, anillo de 4, $p = 1$	0,25	el costo vive en ZZ

5.4. Peso definido: el radio desde la base Z

En un estado de peso de Hamming definido todos los qg_X y qg_Y locales son cero, de modo que $r_q = |qg_Z^{(q)}|$ y el radio se lee solo con disparos en Z. Con la ecuación de probabilidad, el déficit queda

$$1 - r^2 = 1 - \left(\frac{m}{1000}\right)^2 = 4\,p_0\,(1 - p_0)\,:$$

cuatro veces la varianza binomial del resultado, la misma $p_0(1 - p_0)$ que gobierna el ruido de disparo del capítulo 1. La Figura 5.1 la muestra sobre la escala del mili-qang. El déficit es nulo en los polos, máximo en el ecuador y muy sensible cerca de un polo: un qubit a 990 m-qg tiene déficit 0,02, y uno a 800 m-qg, que es lo que da un 10 % de disparos mal ubicados sobre un estado de la base, ya marca 0,36.

Este es el punto en que el filtro de simetría (capítulos 20–21) y el radio se encuentran. Bajo T1 igual en todos los qubits, el estado filtrado es el estado puro sin ruido, así que el déficit filtrado es una medida exacta de entrelazamiento. Las predicciones se registraron antes de correr (§98); sobre circuitos RBS de 4 y 6 qubits:

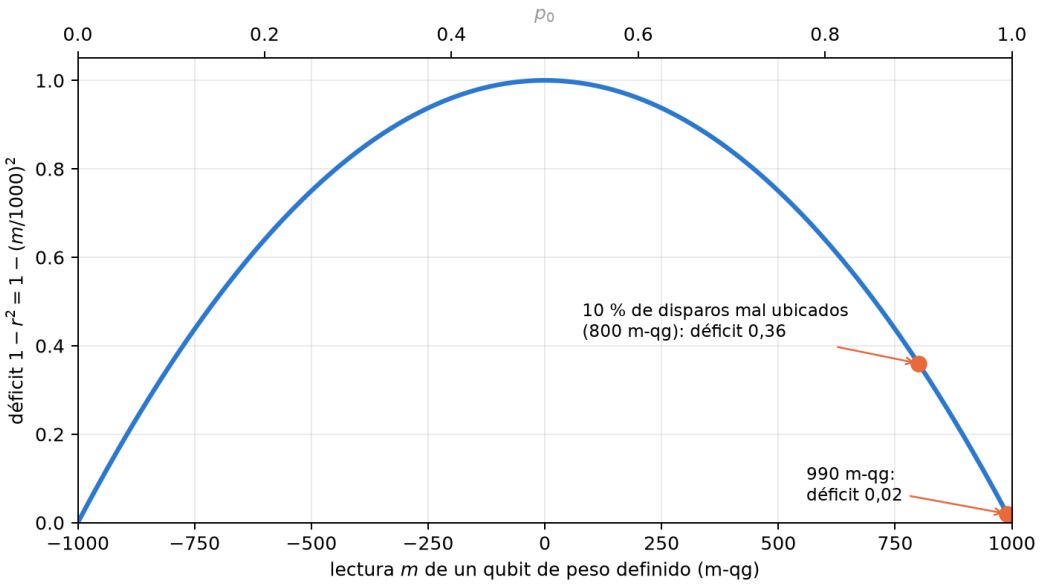


Figura 5.1: El déficit de un qubit de peso definido en función de su lectura en miliqang (abajo) y de su probabilidad (arriba). Cerca de un polo, pocos disparos mal ubicados producen un déficit grande.

Tabla 5.2: El déficit como medida de entrelazamiento bajo ruido, con y sin el filtro qg (§98).

ruido	error exacto del déficit, con qang	sin qang	MSE menor con el filtro
T1 igual	$< 3 \cdot 10^{-15}$	0,061–0,370	30 de 30
T1 desigual	0,013–0,045	0,070–0,342	30 de 30
desfase 0,01	0,031–0,307	0,080–0,352	24 de 30

Sobre estados producto el déficit filtrado es exactamente 0 con los tres ruidos, mientras que la lectura cruda marca 0,60–0,95 en cada qubit excitado solo por el decaimiento: entrelazamiento falso. Una predicción falló: se esperaba que el error crudo fuera menor a media ocupación, y fue mayor (0,177 frente a 0,074), porque la cancelación de primer orden vale solo en $p = 1/2$ exacto.

En modelos de ruido de dispositivos reales (tres de IBM y dos de IonQ, §100), el filtro bajó el error del déficit 3,2–4,0× donde el déficit es grande, pero no sirvió como prueba de “no hay entrelazamiento”: sobre un estado producto quitó solo 15–33 % del déficit falso. La causa es la de la Figura 5.1: los errores dentro del sector dejan 10–21 % de disparos mal ubicados, y cerca del polo eso ya

se lee como 0,36. Un déficit pequeño necesita una calibración por eco antes de interpretarse.

5.5. Dirección y radio por separado

El sesgo polar $qg_Z = r\cos\theta$ mezcla la dirección del vector con su longitud. La lectura habitual $\theta = \arccos(qg_Z)$ se corre hacia el ecuador cada vez que el ruido acorta el vector. Con el radio, las dos cosas se separan (§102):

$$\theta = \operatorname{atan2}\left(\sqrt{qg_X^2 + qg_Y^2},\ qg_Z\right) = \arccos\frac{qg_Z}{r}.$$

Un estado a 30° acortado a $r = 0{,}8$ por ruido despolarizante tiene $qg_Z = 0{,}693$: $\arccos(qg_Z)$ lee $46{,}1^\circ$, y el ángulo separado lee los 30° verdaderos. La Figura 5.2 muestra el efecto para varios radios: el ángulo ingenuo se aplana hacia 90°, y el separado no depende de r.

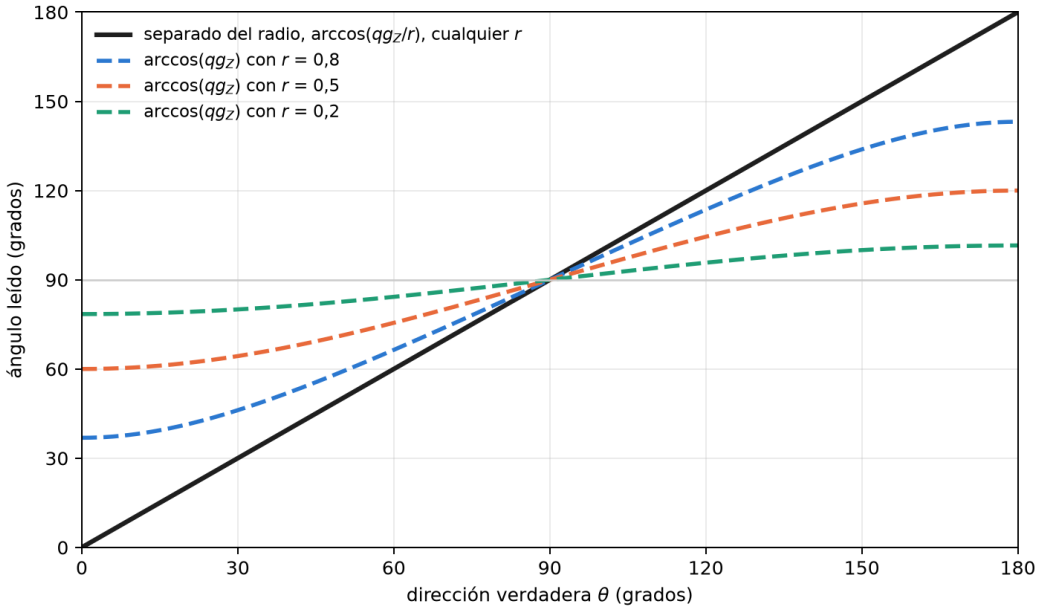


Figura 5.2: El ángulo leído frente a la dirección verdadera. Las curvas punteadas son $\arccos(qg_Z)$ para vectores acortados; la recta es el ángulo separado del radio, exacto para cualquier r bajo ruido despolarizante.

La separación tiene costo y no siempre gana. Con la misma cantidad total de disparos repartida en tres bases:

- **Despolarizante:** el ángulo separado es exacto y $\arccos(qg_Z)$ se equivoca hasta 0,70 rad cerca de los polos; con disparos, el error cuadrático medio baja 5,8×.
- **Desfase:** es donde pierde. El desfase no acorta qg_Z, así que $\arccos(qg_Z)$ es exacto, y el ángulo separado se corre 0,03–0,12 rad hacia los polos.
- **Sin ruido:** medir tres bases cuesta 1,6× en error cuadrático medio.
- **Dispositivos:** en los modelos de IBM el vector se acorta casi uniformemente y el ángulo separado es 5–9× más preciso. En IonQ ganó primero $\arccos(qg_Z)$, porque el compilador había eliminado pares de CX idénticos; en el conjunto de compuertas nativo el ángulo separado gana también ahí, 8,7–9,0× (§103).

La regla práctica: si el radio medido está cerca de 1, conviene $\arccos(qg_Z)$ con todos los disparos en Z; si está claramente por debajo de 1 y el ruido no es desfase puro, conviene el ángulo separado. En la escala angular del capítulo 1 (Sección 1.4), el ejemplo de arriba es 83,3 qga verdaderos frente a 128,1 qga leídos.

La fase azimutal no depende del radio. Como $qg_X = r\sin\theta\cos\varphi$ y $qg_Y = r\sin\theta\sin\varphi$, el cociente elimina r y $\sin\theta$, y $\varphi = \operatorname{atan2}(qg_Y, qg_X)$ es la misma para el vector acortado. Eso vale siempre que el ruido acorte por igual las dos componentes transversales: el despolarizante, el desfase y la relajación T1 conservan la fase. Un canal que trate distinto X e Y la corre: con inversión de bit de probabilidad 0,15, que conserva qg_X y acorta qg_Y, una fase de 0,70 rad se lee 0,53 rad.

Propuestas abiertas. La versión de trabajo del autor agrega una penalización de pureza $\lambda_r(1-r^2)$ a la energía regularizada del capítulo 1, atenúa con r la parte azimutal de la función de radiación y, contra las mesetas estériles inducidas por ruido (Wang et al. 2021), propone vigilar el radio por capa, descartar las capas con $r < 0{,}3$ y compilar con mínima curvatura κ_{qg}, con una reducción del tiempo de exposición del 35 al 60 %. Que el ruido produce mesetas es un resultado conocido; las tres propuestas y esas cifras **no se han verificado**.

5.6. Dualidad onda–partícula e incertidumbre entrópica

El radio también ordena un resultado clásico de los fundamentos. La **predictibilidad** $P = |qg_Z| = |m|/1000$ mide cuánto se sabe del camino (partícula) y la **visibilidad** $V = \sqrt{qg_X^2 + qg_Y^2}$ mide el contraste de la interferencia (onda). Su relación es exactamente el radio (Greenberger y Yasin 1988; Englert 1996):

$$P^2 + V^2 = r^2 \leq 1.$$

La desigualdad de dualidad es, en unidades qg, la afirmación de que el estado está dentro de la esfera, y es una igualdad para los estados puros (Figura 5.3). Un estado a 60° con $r = 0{,}9$ tiene $P = 0{,}45$, $V = 0{,}779$ y $P^2 + V^2 = 0{,}81$. Se verificó en 2000 estados aleatorios con una desviación máxima de $2{,}2 \cdot 10^{-16}$ (§127).

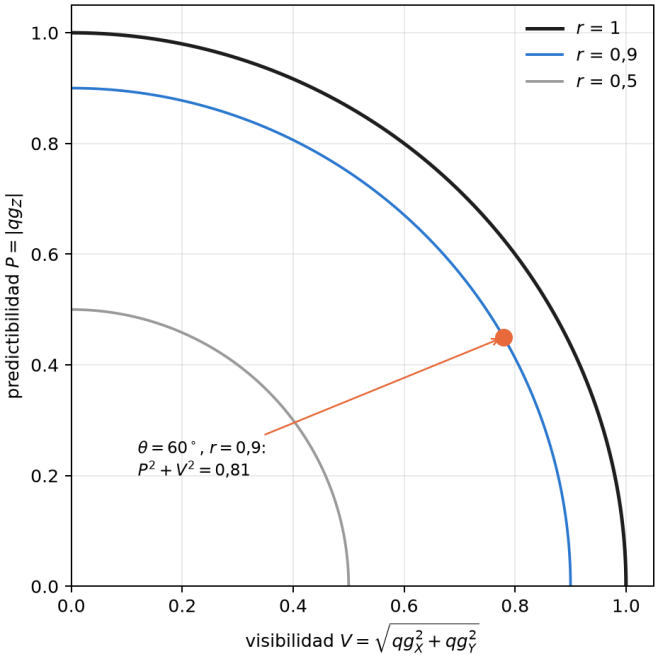


Figura 5.3: Dualidad onda–partícula en unidades qg: cada estado es un punto del cuarto de disco, a distancia r del origen. Los estados puros están sobre el arco $r = 1$.

La versión entrópica usa la dispersión qg_S del capítulo 1 en dos bases. La relación de Maassen–Uffink, con la corrección de Berta y colaboradores para estados mixtos, dice

$$qg_S(Z) + qg_S(X) \;\geq\; 1 + S(\rho), \qquad S(\rho) = H\left(\frac{1+r}{2}\right).$$

Para el estado anterior la suma vale 1,349 y la cota 1,286. La cota es ajustada: el estado $|0\rangle$ la alcanza con igualdad. De ahí sale una advertencia práctica. Con estimadores directos de la entropía (sin corregir), un estado puro parece violar la relación en el 93 % de las corridas de 100 disparos, porque la entropía estimada tiene sesgo hacia abajo; con la corrección de Miller–Madow, en el 37 %. Una prue-

ba de la cota necesita estimadores corregidos o intervalos, como los del capítulo 4.

5.7. Estimar el radio con disparos

Como r^2 es una suma de cuadrados, hereda el sesgo de los estimadores cuadráticos del capítulo 4 (Sección 4.4): cada eje suma $(1 - qg^2)/N$, y un estado entrelazado parece más puro de lo que es. La corrección exacta $(N\widehat{qg}^{\,2} - 1)/(N - 1)$ se aplica eje por eje (`radius2_estimate`), y en un estado de peso definido basta con el eje Z.

5.8. Sin qang y con qang

Tabla 5.3: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
medir la pureza local	tomografía en tres bases y $\mathrm{Tr}\,\rho^2$	$r^2 = qg_X^2 + qg_Y^2 + qg_Z^2$; en peso definido, $1 - r^2 = 4p_0(1 - p_0)$ desde **una sola base**	**a favor**: una base en lugar de tres, gracias a la ecuación de probabilidad junto con el peso definido
medir entrelazamiento de un registro puro	one-tangle y Meyer–Wallach por su definición	el déficit $1 - r^2$, promediado	**ninguna en el valor**; con estado global mixto el déficit mezcla entrelazamiento y ruido, igual que el one-tangle
dirección de un estado con ruido	$\theta = \arccos qg_Z$	$\theta = \arccos(qg_Z/r)$	**a favor** con ruido despolarizante; **en contra** con desfase puro
dualidad onda–partícula	visibilidad y predictibilidad por separado	$P^2 + V^2 = r^2$	**reformulación**: misma relación

Balance. La diferencia práctica es leer la pureza en peso definido con una sola base de medición. El resto son identidades conocidas escritas en la escala qang, y la separación dirección–radio gana o pierde según el ruido.

5.9. En código

```
import math
import numpy as np
from qang import complementarity, formulation, statistics

bell = np.array([1, 0, 0, 1]) / math.sqrt(2)
formulation.radius_profile(bell, 2)       # [0.0, 0.0]: cada qubit en el centro
w = np.zeros(8); w[[1, 2, 4]] = 1 / math.sqrt(3)
formulation.meyer_wallach(w, 3)          # 0.889: entrelazamiento global del estado W
formulation.weight_sector_radius([0.99, 0.8])   # [0.0199, 0.36]: déficit desde qg_Z (99

formulation.direction_from_qg(0.4, 0.0, 0.6928) # (0.524, 0.0, 0.8): θ = 30° separado de
complementarity.duality_sum(0.779, 0.0, 0.45)    # 0.81 = P² + V² = r²
complementarity.entropic_sum(0.45, 0.779)        # 1.35 ≥ cota 1.29
```

Las figuras se generan con `tools/make_cap05_figures.py`.

5.10. Resumen

- Con un estado mixto, la ecuación de probabilidad del capítulo 1 sigue valiendo con $qg_Z = r\cos\theta$; el radio local $r^2 = qg_X^2 + qg_Y^2 + qg_Z^2 = 2\,\mathrm{Tr}\,\rho^2 - 1$ es la lectura que falta.
- Si el registro es puro, el déficit $1-r^2$ es el one-tangle y su promedio es la medida de Meyer–Wallach; con un estado global mixto, mezcla entrelazamiento y ruido.
- En peso definido, $1 - r^2 = 4p_0(1 - p_0)$ se lee solo en Z, y con el filtro bajo T1 igual es exacto; cerca de un polo, pocos disparos mal ubicados lo inflan, y en dispositivos un déficit chico requiere calibración.
- $\theta = \arccos(qg_Z/r)$ separa la dirección de la pureza: gana con ruido despolarizante y pierde con desfase puro.
- La dualidad onda–partícula es $P^2 + V^2 = r^2$, y la incertidumbre entrópica acota $qg_S(Z) + qg_S(X)$ por $1 + S(\rho)$.

Notas bibliográficas

El *one-tangle* y la concurrencia son de Coffman et al. (2000), y el entrelazamiento global, de Meyer y Wallach (2002). La dualidad onda–partícula es Greenberger y Yasin (1988) y Englert (1996); la incertidumbre entrópica, Maassen y Uffink (1988) y, con memoria cuántica, Berta et al. (2010). Los algoritmos de Deutsch–Jozsa, Bernstein–Vazirani, Simon y Grover son Deutsch y Jozsa (1992), Bernstein y Vazirani (1997), Simon (1997) y Grover (1996). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

6 Polarización óptica y parámetros de Stokes en unidades qg

La polarización de un fotón es un qubit, y la óptica clásica de la polarización es, sin cambios, la física de un qubit escrita con otros nombres. Este capítulo lee esa óptica con la base del capítulo 1. La pieza central es que un polarizador es una medición de dos resultados, pasa o no pasa, y su transmisión es exactamente la probabilidad p_0 de la ecuación qang. De ahí salen la ley de Malus, los parámetros de Stokes, el grado de polarización y la polarimetría por conteo de fotones, todo en qg y en mili-qang (§83).

6.1. La ley de Malus como ecuación de probabilidad

Luz polarizada linealmente a un ángulo α atraviesa un polarizador orientado a ϑ. Con $\Delta = \vartheta - \alpha$, la fracción transmitida es la ley de Malus, que para un fotón individual es una probabilidad:

$$p_0 = \cos^2 \Delta .$$

La comparación con la regla de Born del capítulo 1, $p_0 = \cos^2(\theta/2)$, es inmediata: **el ángulo qang es el doble del ángulo físico**, $\theta = 2\Delta$, y la lectura en mili-qang es $m = 1000 \cos 2\Delta$. Por eso dos polarizaciones ortogonales, H y V, separadas 90° en el laboratorio, son puntos opuestos de la esfera, separados 180° (Figura 6.1). Un analizador girado 30° respecto de la luz transmite $p_0 = 0{,}75$: es el estado de $\theta = 60^\circ$ y $+500$ m-qg del círculo qang del capítulo 1 (Figura 1.1).

Para luz con cualquier polarización, pura o parcial, la transmisión por un polarizador lineal a ϑ es

$$p_0 = \frac{1 + q g_Z \cos 2\vartheta + q g_X \sin 2\vartheta}{2} = \frac{1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{2}, \qquad \mathbf{a} = (\sin 2\vartheta,\ 0,\ \cos 2\vartheta),$$

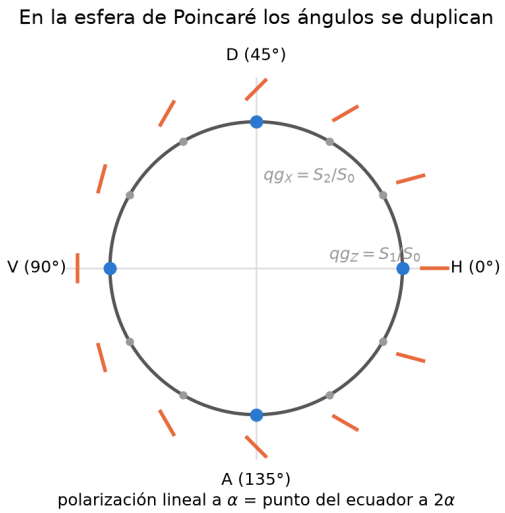


Figura 6.1: La duplicación de ángulos. Cada trazo naranja es la dirección física de la polarización lineal a α; su punto en el ecuador de la esfera está a 2α. H y V, perpendiculares en el laboratorio, quedan en polos opuestos del eje qg_Z.

con $\mathbf{r} = (qg_X, qg_Y, qg_Z)$ el vector qg de la luz y $\mathbf{a}$ el del estado que el analizador deja pasar. Es la probabilidad de transición del capítulo 3 entre dos vectores qg (Sección 3.4), y su lectura en mili-qang es $m = 1000\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$. La Figura 6.2 muestra cuatro casos: luz H ($\cos^2\vartheta$), luz D (la misma curva corrida $45°$), luz no polarizada (siempre $\frac{1}{2}$, es decir, 0 m-qg) y luz parcialmente polarizada con $qg_Z = 0{,}6$ y $qg_X = 0{,}3$. Esta última transmite 0,80 a $0°$, un máximo de 0,835 a $13{,}3°$ y un mínimo de 0,165 a $103{,}3°$; la diferencia entre máximo y mínimo, 0,671, es su grado de polarización.

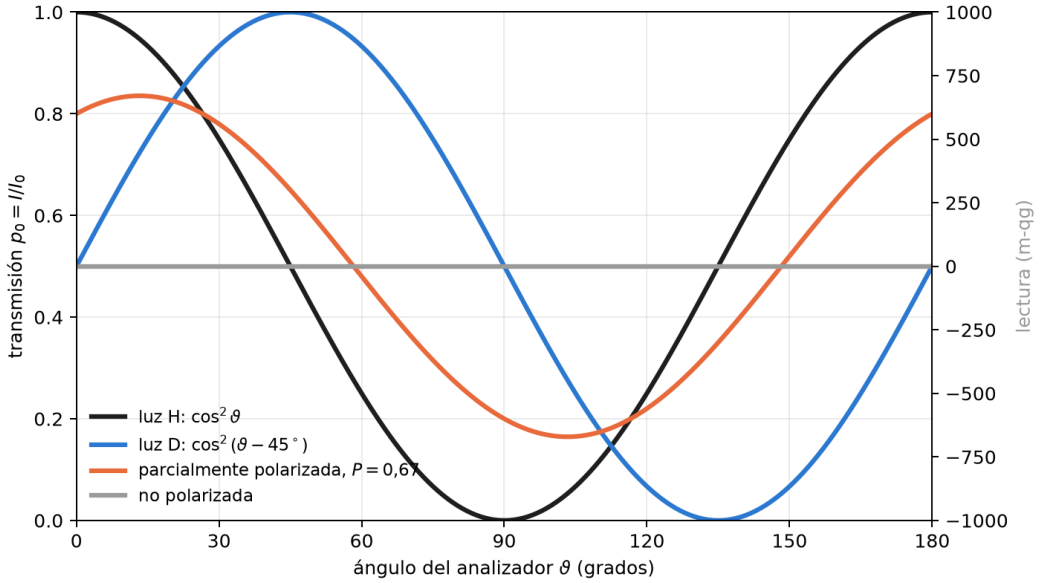


Figura 6.2: La ley de Malus como ecuación de probabilidad: transmisión de un polarizador lineal en función de su ángulo, con su lectura en mili-qang a la derecha.

6.2. Los parámetros de Stokes son valores qg

La esfera de Poincaré es la esfera de Bloch. Con $|H\rangle = |0\rangle$ y $|V\rangle = |1\rangle$, los parámetros de Stokes normalizados son los tres valores qg, cada uno la diferencia de las dos probabilidades de un analizador:

Tabla 6.1: Los parámetros de Stokes normalizados como valores qg (§83).

valor qg	Stokes	analizador	lectura
qg_Z	S_1/S_0	H / V	$p_H - p_V$
qg_X	S_2/S_0	D / A, a $\pm 45^\circ$	$p_D - p_A$
qg_Y	S_3/S_0	R / L, circular	$p_R - p_L$

La convención de la circular derecha cambia de un texto a otro; aquí $R = (|H\rangle + i|V\rangle)/\sqrt{2}$, de modo que $S_3 > 0$ significa $qg_Y > 0$ (la biblioteca acepta la convención opuesta con `circular_sign=-1`). Como cada parámetro es $2p_0 - 1$ en su propia base, cada uno se expresa en mili-qang con la ecuación del capítulo 1.

La elipse de polarización se lee con los ángulos del vector qg, divididos por dos: su orientación es $\psi = \frac{1}{2}\,\mathrm{atan2}(qg_X, qg_Z)$ y su elipticidad $\chi = \frac{1}{2}\arcsin(qg_Y/P)$. Para la luz parcial del ejemplo, $\psi = 13{,}3^\circ$: el ángulo donde la Figura 6.2 tiene su máximo.

6.3. Grado de polarización y pureza

La luz parcialmente polarizada es un estado mixto. Su grado de polarización es la longitud del vector qg, el radio del capítulo 5 (Sección 5.1):

$$P = \sqrt{qg_X^2 + qg_Y^2 + qg_Z^2} = r, \qquad \mathrm{Tr}\,\rho^2 = \frac{1 + P^2}{2}.$$

La luz no polarizada está en el centro de la esfera. Un despolarizador ideal tiene matriz de Mueller $\mathrm{diag}(1, d, d, d)$: acorta el vector en un factor d y no cambia su dirección. Es el caso en que el capítulo 5 separa dirección y radio (Sección 5.5): con $d = 0{,}7$, la luz del ejemplo pasa de $P = 0{,}671$ a $P = 0{,}470$, y la orientación de su elipse sigue en $13{,}3^\circ$. El sesgo polar, en cambio, cae de 0,60 a 0,42, y la lectura ingenua $\arccos(qg_Z)$ pasa de $53{,}1^\circ$ a $65{,}2^\circ$: un ensanchamiento falso de 12° atribuible al ruido. El ángulo separado $\arccos(qg_Z/P) = 26{,}57^\circ$ (73,8 qga en la escala del capítulo 1) no cambia.

Complementariedad. La predictibilidad en la base H/V, $P_Z = |qg_Z|$, y la visibilidad de franjas en las bases transversales, $V = \sqrt{qg_X^2 + qg_Y^2}$, cumplen exactamente $P_Z^2 + V^2 = P^2 \le 1$. La desigualdad de Greenberger–Yasin–Englert es aquí la condición de que el vector de Stokes esté dentro de la esfera de Poincaré, y la cota entrópica de Maassen–Uffink corregida por la pureza (Berta et al.

2010) queda $qg_S(Z) + qg_S(Y) \geq 1 + H\big((1+P)/2\big)$: es la dualidad del capítulo 5 (Sección 5.6) leída en polarimetría.

6.4. Elementos sin pérdidas: la matriz de Mueller es la regla de compuertas

Una matriz de Mueller actúa sobre (S_0, S_1, S_2, S_3); en el orden (I, Z, X, Y) es la matriz de transferencia de Pauli. Para un elemento sin pérdidas, con matriz de Jones unitaria U, es exactamente la regla de compuertas qang:

$$qg'_P = qg_{U^\dagger P U}.$$

Las láminas de onda son compuertas de un qubit, y el capítulo 2 se aplica tal cual (Sección 2.3): una lámina de media onda con el eje a $22{,}5^\circ$ lleva H a D ($qg_X = 1$), porque gira la polarización física 45° y el punto de la esfera 90°; una lámina de cuarto de onda a 45° lleva H a una polarización circular ($qg_Y = -1$ con la convención de arriba). El polarizador, en cambio, no es unitario: es la medición. Todas estas identidades se verifican numéricamente en `tests/test_polarization.py`.

6.5. Polarimetría por conteo de fotones

Con fuentes débiles o de un solo fotón, los parámetros de Stokes se estiman contando: n_H, n_V en la base H/V, n_D, n_A en la diagonal y n_R, n_L en la circular. Cada par da un valor qg con su intervalo, igual que una medición de un qubit (capítulo 4). Con 1000 fotones por base y conteos $(800, 200)$, $(650, 350)$ y $(500, 500)$:

$$qg_Z = 0{,}599\,[0{,}548;\,0{,}647], \quad qg_X = 0{,}299\,[0{,}240;\,0{,}358], \quad qg_Y = 0{,}000\,[-0{,}062;\,0{,}062],$$

intervalos de Bayes–Haar del 95 %. En mili-qang, qg_Z es $+599$ m-qg con una resolución de $\sigma_m = 1000 \sin\theta/\sqrt{N} = 25$ m-qg.

El grado de polarización necesita más cuidado. P es la raíz de una suma de cuadrados, y cada cuadrado hereda el sesgo $(1-qg^2)/N$ del capítulo 4 (Sección 4.4): con pocos fotones, la luz no polarizada parece polarizada. La Figura 6.3 lo cuantifica con una simulación de este capítulo (4000 repeticiones por punto). Con luz no polarizada, el estimador directo da en promedio $\hat{P} \approx 0{,}50$ con 10 fotones por base, $0{,}16$ con 100 y $0{,}05$ con 1000. Usar los cuadrados insesgados lo baja unas

tres veces ($\approx 0{,}18$, $0{,}055$ y $0{,}017$), pero no lo anula: la raíz y el recorte en cero dejan un sesgo residual. Con luz de $P = 0{,}5$, el estimador directo sobreestima con pocos fotones y el insesgado subestima levemente; desde unos 200 fotones por base los dos coinciden con el valor verdadero.

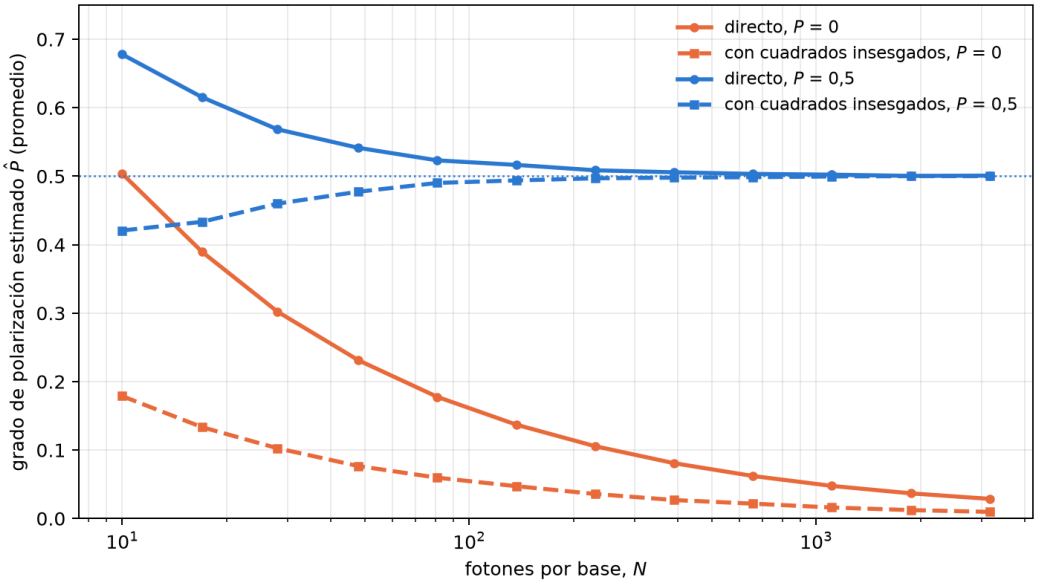


Figura 6.3: Sesgo del grado de polarización estimado por conteo, en función de los fotones por base. Líneas llenas: estimador directo; punteadas: con los cuadrados insesgados del capítulo 4. Las líneas de puntos horizontales marcan el valor verdadero.

La consecuencia práctica: para afirmar que una fuente está polarizada con pocos fotones, hace falta un intervalo para P o un umbral calibrado con luz no polarizada, no el valor puntual.

Propuestas abiertas. La versión de trabajo del autor traslada a la óptica programable la energía regularizada del capítulo 1, con una penalización $\lambda_r(1-P^2)$ que castiga la despolarización del interferómetro, y una función de radiación cuya parte azimutal se atenúa con P. Como en los capítulos anteriores, las penalizaciones no están definidas y ninguna de las dos propuestas se ha verificado.

6.6. Sin qang y con qang

Tabla 6.2: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
transmisión de un polarizador	ley de Malus, $I = I_0 \cos^2 \Delta$	$p_0 = \cos^2 \Delta$ con $\theta = 2\Delta$; lectura $1000\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}$ m-qg	**ninguna en el valor**; qang la une a la probabilidad de transición del capítulo 3
describir la polarización	parámetros de Stokes S_1, S_2, S_3 normalizados	son qg_Z, qg_X, qg_Y	**identidad**: mismos números con otro nombre
grado de polarización con pocos fotones	$\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$: sesgado hacia arriba	cuadrados insesgados del capítulo 4	**a favor**: el sesgo baja unas tres veces, sin desaparecer
láminas de onda	matrices de Mueller	la regla de compuertas $qg'_P = qg_{U^\dagger P U}$	**reformulación**

Balance. La óptica de polarización ya trabaja con valores qg bajo otro nombre (Stokes). La diferencia medible es estadística: la corrección de los cuadrados reduce el sesgo del grado de polarización con pocos fotones.

6.7. En código

```
import math
import numpy as np
from qang import polarization as pz

luz = {"Z": 0.6, "X": 0.3, "Y": 0.0}
pz.malus_intensity(luz, 0.0)                    # 0.80: transmisión a 0°
pz.malus_intensity(luz, math.radians(13.28))    # 0.835: el máximo, en la orientación de

H = np.array([1, 0])
pz.jones_to_qg(pz.half_wave_plate(math.radians(22.5)) @ H)  # {'X': 1.0, ...}: H → D
pz.jones_to_qg(pz.quarter_wave_plate(math.radians(45)) @ H) # {'Y': -1.0, ...}: H → cir
```

```
c = pz.qg_from_counts(800, 200, 650, 350, 500, 500, method="bayes")
c["Z"], c["X"], c["P"]                    # 0.6, 0.3, 0.671 y los intervalos en c["interva
```

Las figuras se generan con `tools/make_cap06_figures.py`.

6.8. Resumen

- Un polarizador es una medición de dos resultados: su transmisión es $p_0 = \cos^2\Delta$, la ecuación de probabilidad del capítulo 1 con el ángulo qang igual al doble del físico, $\theta = 2\Delta$.
- Para cualquier luz, la ley de Malus es la probabilidad de transición $(1+\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})/2$ entre la luz y el analizador; su lectura es $1000\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$ m-qg.
- Los parámetros de Stokes normalizados son qg_Z, qg_X y qg_Y; la elipse se lee con la mitad de los ángulos del vector qg.
- El grado de polarización es el radio del capítulo 5; un despolarizador lo acorta sin girar la elipse.
- Las láminas de onda son compuertas: la matriz de Mueller sin pérdidas es la regla $qg'_P = qg_{U^\dagger PU}$.
- Por conteo de fotones, cada parámetro tiene su intervalo; el grado de polarización está sesgado hacia arriba con pocos fotones, y los cuadrados insesgados reducen ese sesgo unas tres veces sin eliminarlo.

Notas bibliográficas

Los parámetros de polarización son los de Stokes (1852). La ley de Malus, la esfera de Poincaré y el cálculo de Mueller siguen el tratamiento clásico de Born et al. (1999). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

7 Fases geométricas y el teorema de Stokes en la esfera

La fase no es una probabilidad. El capítulo 2 mostró que las fases de una compuerta no aparecen en la matriz de transición: una medición en Z no las ve. Este capítulo trata una fase que sí tiene significado físico, la **fase geométrica** que adquiere un qubit llevado alrededor de un bucle cerrado, y muestra que la base del capítulo 1 la alcanza dos veces. Primero, su valor: para un bucle a altura constante, la fase en vueltas *es* la probabilidad p_0. Después, su medición: un interferómetro la convierte en una probabilidad, y el ángulo qang de esa probabilidad es la fase (§84).

7.1. La conexión y la curvatura de Berry

Si un estado $|\psi(\mathbf{R})\rangle$ depende de parámetros $\mathbf{R}$ y se lo lleva lentamente por un camino cerrado, además de la fase dinámica acumula una fase que depende solo de la geometría del camino. Su densidad es la **conexión de Berry**, $\mathbf{A} = i\langle\psi|\nabla\psi\rangle$, y su rotor es la **curvatura**. Para un qubit, con el estado descrito por su vector qg sobre la esfera, la curvatura es un monopolo de intensidad $\frac{1}{2}$ en el centro: sobre la esfera unitaria su componente normal vale $\frac{1}{2}$ en todas partes.

7.2. Stokes en la esfera

El teorema de Stokes convierte la integral de línea de la conexión alrededor del bucle C en el flujo de la curvatura a través de la superficie que encierra. Como la curvatura es uniforme, el flujo es $\frac{1}{2}$ por el área, es decir, por el ángulo sólido $\Omega(C)$:

$$\gamma(C) = -\frac{\Omega(C)}{2} \quad (\text{mód } 2\pi).$$

La fase es invariante de gauge (no depende de la fase que se elija para cada estado del camino) y cambia de signo al recorrer el bucle al revés.

7.3. Bucles a altura constante: la fase es la probabilidad

Un bucle alrededor del eje Z a sesgo polar constante qg_Z encierra el casquete que está por encima, de ángulo sólido $\Omega = 2\pi(1 - qg_Z)$. En vueltas, la unidad qg_Φ de la biblioteca,

$$\varphi = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{qg_Z - 1}{2} = -p_1 \equiv p_0 \quad (\text{mód } 1), \qquad \varphi = \frac{1000 + m}{2000} \text{ vueltas.}$$

La fase geométrica de un bucle a altura constante, medida en vueltas, es la probabilidad p_0 de su altura, y con el mili-qang es una función lineal de la lectura. La razón es la misma que hizo uniforme la distribución de Haar en el capítulo 4 (Sección 4.2): por el teorema de Arquímedes, la fracción de la esfera que queda en el casquete por encima de la altura qg_Z es $(1 - qg_Z)/2 = p_1$. El ángulo sólido es $4\pi p_1$ y la fase, $-2\pi p_1$.

Algunos valores: un bucle a $+500$ m-qg ($p_0 = 0{,}75$) acumula $0{,}75$ vueltas, es decir, $-\frac{1}{4}$ de vuelta; uno en el ecuador acumula media vuelta, π; uno pegado al polo $|0\rangle$, nada. La Figura 7.1 muestra la recta junto con los tres cálculos independientes de la sección siguiente.

En la escala angular del capítulo 1 (Sección 1.4), que mide en milésimas de vuelta, la misma frase se lee sin conversión: **la fase de un bucle a altura constante es $1000\,p_0$ qga** (módulo 1000). El bucle a $+500$ m-qg acumula 750 qga, el del ecuador 500 qga y el octante de la última sección, -125 qga (875 qga). La lectura en m-qg y la fase en qga son entonces dos escalas lineales de la misma probabilidad: $\varphi_{qga} = (1000 + m)/2$.

El ecuador merece una nota. Allí la fase vale π, y $+\pi$ y $-\pi$ son el mismo ángulo. Un cálculo numérico puede devolver cualquiera de los dos según el redondeo, y una comparación que no lo tenga en cuenta falla aunque el resultado sea correcto. Eso es exactamente lo que le pasaba a una de las pruebas de la biblioteca, corregida para comparar sobre el círculo.

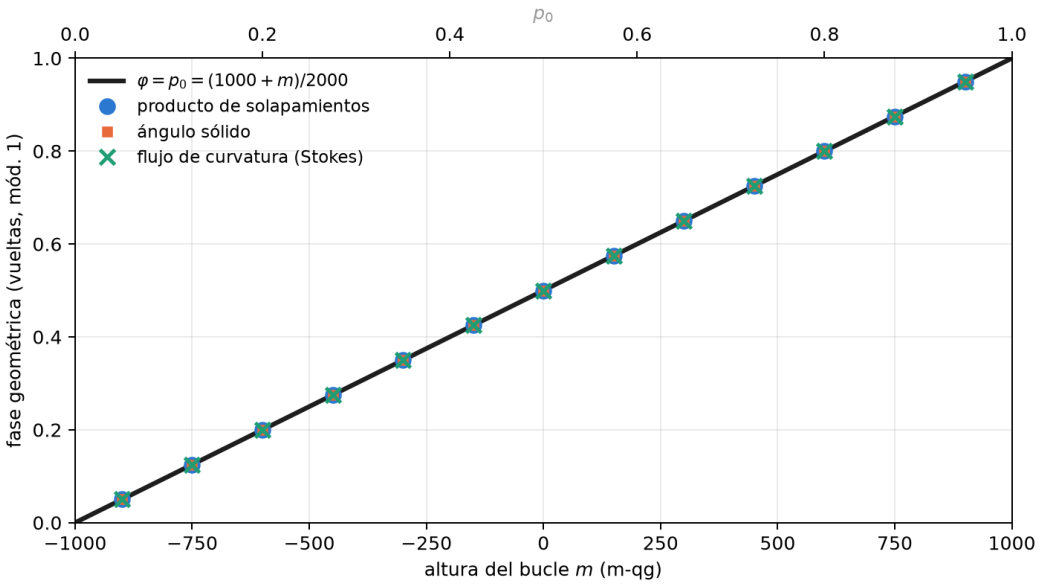


Figura 7.1: La fase geométrica de un bucle a altura constante en función de su lectura en mili-qang (abajo) y de su probabilidad (arriba). La recta es $\varphi = p_0$; los símbolos son los tres cálculos independientes.

7.4. Tres cálculos independientes

La biblioteca calcula la fase de tres maneras que no comparten código y verifica que coinciden (14 pruebas):

1. **Producto de solapamientos** (Pancharatnam): $\gamma = -\arg \prod_k \langle \psi_k | \psi_{k+1} \rangle$ sobre el bucle discretizado, invariante de gauge.
2. **Ángulo sólido**, como abanico de triángulos esféricos (fórmula de Van Oosterom y Strackee). Coincide con el producto de solapamientos a 10^{-10}.
3. **Flujo de la curvatura** a través del casquete, integrado numéricamente. Coincide con la integral de línea a 10^{-5}: es el teorema de Stokes verificado en números.

7.5. Medir la fase: el interferómetro y la ecuación de probabilidad

Una medición en Z no ve la fase. Para medirla hace falta un **interferómetro**: un qubit de control en $|+\rangle$ gobierna si el sistema recorre el bucle, y al final se mide

el control en la base X (prueba de Hadamard). Con la fase dinámica cancelada, por ejemplo con un eco, la probabilidad de leer 0 en el control es

$$p_0 = \frac{1+\cos\gamma}{2} = \cos^2\frac{\gamma}{2}\,:$$

la regla de Born del capítulo 1 con γ en el lugar de θ. Por lo tanto **el ángulo qang de la probabilidad medida es la fase geométrica**, $\hat{\gamma} = 2\arccos\sqrt{\hat{p}_0}$, y su lectura en mili-qang es $m = 1000\cos\gamma$.

Todo lo que la base dice de ese ángulo se aplica a la fase. En particular, por ser la transformación arcoseno (Sección 1.9), su incertidumbre es $1/\sqrt{N}$ **para cualquier valor de la fase**. La Figura 7.2 lo verifica con una simulación de este capítulo: con 1000 disparos por punto, el desvío de $\hat{\gamma}$ queda en torno a 32 mrad (unos 1,8°) de 10° a 170°. En 0 y en π el desvío es cero porque el resultado es determinista, siempre 0 o siempre 1, y ahí hacen falta los intervalos exactos del capítulo 4.

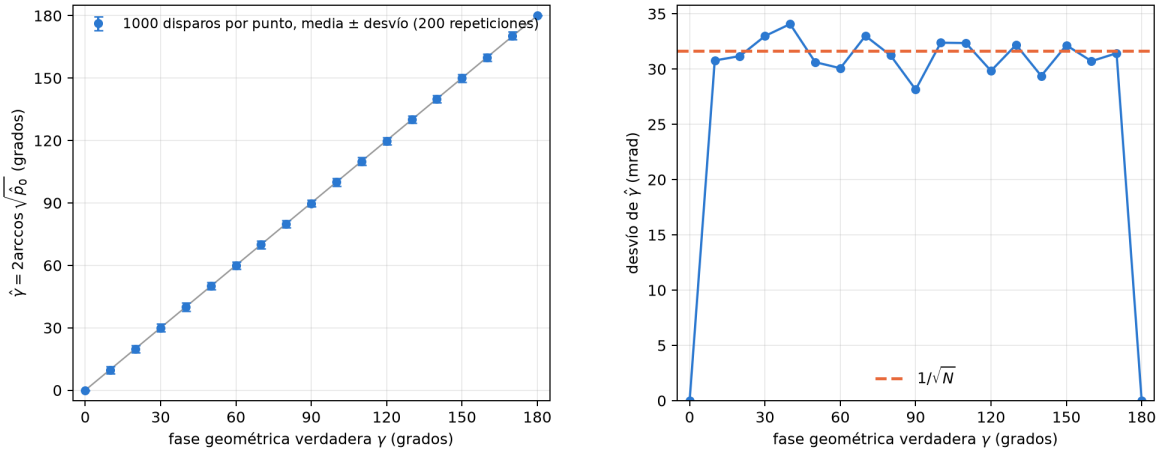


Figura 7.2: Medición interferométrica de la fase geométrica con la ecuación de probabilidad. Izquierda: la fase estimada como ángulo qang de la probabilidad medida, frente a la verdadera. Derecha: su desvío, igual a $1/\sqrt{N}$ en todo el rango.

Hay un límite, el mismo del capítulo 1. Como $\cos\gamma$ es par, una sola probabilidad da $|\gamma|$ en $[0,\pi]$, no su signo. El remedio es el del signo de rama (Sección 1.6): medir también la otra cuadratura, corriendo la fase de referencia un cuarto de vuelta, que da $\sin\gamma$. Las dos probabilidades juntas fijan la fase en todo el círculo.

7.6. La fase de Pancharatnam y el octante

Para la luz polarizada la misma fase es la de Pancharatnam en la esfera de Poincaré, y el capítulo 6 ya dejó listas las coordenadas (Sección 6.1). El circuito H → D → R → H recorre un octante de la esfera: tres arcos de un cuarto de círculo máximo que encierran un octavo de su área, $\Omega = 4\pi/8 = \pi/2$. La fase es $\gamma = -\pi/4$, un octavo de vuelta hacia atrás ($0{,}875$ vueltas módulo 1), y la biblioteca la reproduce a partir de los tres vectores qg.

7.7. Sin qang y con qang

Tabla 7.1: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
fase geométrica de un bucle a altura constante	$-\frac{1}{2}$ del ángulo sólido, $\Omega = 2\pi(1-\cos\theta)$	la fase en vueltas es $p_0 = (1000+m)/2000$	**equivalente**; con qang se lee de una sola probabilidad medida
medir la fase en un interferómetro	invertir $\cos^2(\gamma/2)$ con el método delta	el ángulo qang es la fase, con incertidumbre $1/\sqrt{N}$ para cualquier valor	**mismo resultado** en el interior: el método delta también da $1/\sqrt{N}$; qang lo da sin derivar. En 0 y π los dos dan ancho cero y hacen falta los intervalos del capítulo 4
el signo de la fase	segunda cuadratura	segunda cuadratura	**ninguna**: el límite es el mismo

Balance. La fase de Berry es la misma con o sin qang; lo que la escala agrega es leerla de una sola probabilidad y tener su barra de error sin derivar nada. No agrega precisión.

7.8. En código

```
import math
import numpy as np
from qang import geometric

geometric.cone_phase_turns(0.5)       # 0.75 vueltas = p0 a +500 m-qg
geometric.cone_phase_turns(0.0)       # 0.5: el ecuador, media vuelta

# bucle discretizado a qg_Z = 0.8: la fase por solapamientos, en vueltas
r = math.sqrt(1 - 0.8 ** 2)
bucle = [np.array([r * math.cos(a), r * math.sin(a), 0.8]) for a in np.linspace(0, 2 * mat
geometric.geometric_phase_qg(bucle).phi        # 0.9 (= p0 = 0.9)

octante = [np.array([0, 0, 1.0]), np.array([1.0, 0, 0]), np.array([0, 1.0, 0])]  # H, D,
geometric.geometric_phase_qg(octante).phi      # 0.875: -1/8 de vuelta
```

Las figuras se generan con `tools/make_cap07_figures.py`.

7.9. Resumen

- La fase geométrica de un bucle cerrado es menos la mitad del ángulo sólido que encierra: el teorema de Stokes con la curvatura de Berry, un monopolo de intensidad $\frac{1}{2}$.
- Para un bucle a altura constante, la fase en vueltas es p_0 (módulo 1), es decir, $(1000 + m)/2000$: la misma razón de Arquímedes que hace uniforme la medida de Haar en m-qg.
- Tres cálculos independientes (solapamientos, ángulo sólido, flujo de curvatura) coinciden a 10^{-10} y 10^{-5}.
- Un interferómetro convierte la fase en la probabilidad $\cos^2(\gamma/2)$; su ángulo qang es la fase, con incertidumbre $1/\sqrt{N}$ para cualquier valor, y el signo requiere una segunda cuadratura.
- El circuito de polarización H → D → R → H encierra un octante y acumula $-\pi/4$.

Notas bibliográficas

La fase geométrica es la de Berry (1984), anticipada en óptica por Pancharatnam (1956). Su extensión a evoluciones cíclicas no adiabáticas es Aharonov y Anandan (1987), y la formulación general con la conexión de Pancharatnam, Samuel y Bhandari (1988). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

8 Información de Fisher, relojes, gravedad y metrología

La metrología es la disciplina de medir un parámetro con la menor incertidumbre posible, y su herramienta central es la información de Fisher: cuánto enseña cada disparo sobre el parámetro. Este capítulo la escribe sobre la base del capítulo 1. La ecuación de probabilidad $p_0 = \cos^2(\theta/2)$ fija cuánta información lleva cada lectura, y de ahí salen la resolución en mili-qang, el punto de operación de un interferómetro, la comparación de dos relojes atómicos a un metro de altura, la ventaja (y los límites) del entrelazamiento y la termometría de un qubit.

8.1. Desde la base: la información de un disparo

Un disparo en la base Z es una moneda con probabilidad p_0. Su información de Fisher sobre el ángulo es

$$F_\theta = \frac{(dp_0/d\theta)^2}{p_0(1-p_0)} = \frac{\sin^2\theta/4}{\sin^2\theta/4} = 1,$$

constante en toda la esfera; sobre la lectura $qg_Z = \cos\theta$, en cambio, es $F_{qg} = 1/(1-qg_Z^2)$, que crece hacia los polos. **El ángulo qang es la coordenada plana de la información y qg_Z la coordenada curva** (Figura 8.1). Las dos descripciones son la misma física: la varianza $1/N$ del ángulo del capítulo 1 es la cota de Cramér–Rao en la coordenada plana (§167). En la escala angular del capítulo 1 (Sección 1.4), la misma información constante vale $F_{qga} = 4\pi^2 \cdot 10^{-6}$ qga^{-2} por disparo: es la Q-Fisher de la Fundamentación, y su cota de Cramér–Rao es la desviación de $159{,}15/\sqrt{N}$ qga en todo el círculo.

Expresada en mili-qang, la cota da la resolución de una lectura:

$$\sigma_m = \frac{1000\,|\sin\theta|}{\sqrt{N}} \text{ m-qg}, \qquad N = \left(\frac{1000\sin\theta}{\delta}\right)^2 \text{ disparos para resolver } \delta \text{ m-qg}.$$

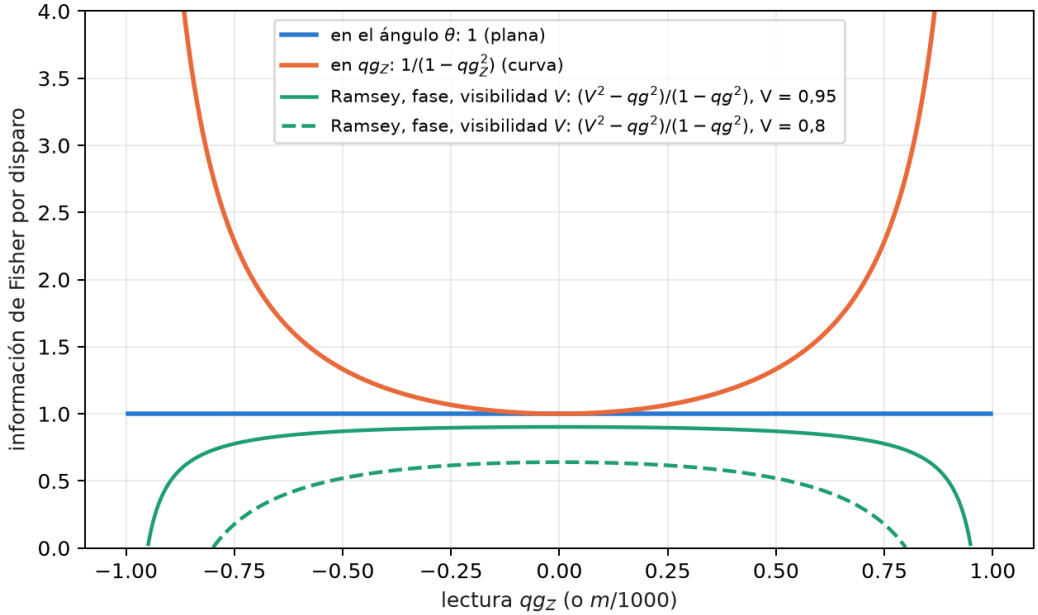


Figura 8.1: Información de Fisher por disparo. En el ángulo es constante; en qg_Z crece hacia los polos. En un interferómetro de Ramsey con visibilidad $V < 1$ (en verde) la información sobre la fase cae a cero en las franjas extremas y es máxima en el centro.

En el ecuador, resolver 10 m-qg exige 10^4 disparos y resolver 1 m-qg, 10^6; a 60° del polo, 5 m-qg cuestan 30 000. Cerca de un polo la lectura es más precisa en m-qg, pero un m-qg corresponde allí a un ángulo mayor: un estado a δ m-qg del polo está a $\arccos(1-\delta/1000) \approx \sqrt{2\delta/1000}$ radianes, 2,56° para 1 m-qg.

8.2. Geometría de la información y el gradiente natural

La versión de muchos parámetros de la información de Fisher es la métrica de Fubini–Study, y gobierna el **gradiente natural**: el descenso que mide los pasos en distancia entre estados y no en distancia entre parámetros. En un ansatz real de rotaciones R_Y y compuertas CZ, todo estado del circuito es real, $\langle Y_k \rangle = 0$ antes de cada rotación y cada entrada diagonal de la métrica vale exactamente $\frac{1}{4}$: los ángulos son planos uno por uno, y toda la curvatura está en los términos cruzados, que dentro de una capa son correladores $\langle Y_i Y_j \rangle / 4$, medibles con un circuito por capa (§159).

Dos consecuencias prácticas, verificadas en una cadena de Ising de 4 qubits con 20 semillas: el descenso en coordenadas qg **no converge nunca** (0 de 20), porque la coordenada curva distorsiona los pasos; y el gradiente natural con la métrica de bloques qg_{YY} es 1,3 veces más rápido que el descenso en el ángulo, y 4,6 veces con la métrica completa. La ganancia viene de la métrica, no de cambiar de coordenada: el gradiente natural en qg es el descenso euclidiano en θ. La regla es optimizar en el ángulo y leer en qg.

8.3. Dos relojes y la gravedad

Un reloj atómico mide una fase, y dos relojes a distinta altura avanzan a ritmos distintos: el corrimiento al rojo gravitatorio. Leídos con el mismo láser, dan $qg_{Z,1} = \cos(\varphi + \delta)$ y $qg_{Z,2} = \cos(\varphi - \delta)$, donde φ es una fase común aleatoria (el ruido del láser) y 2δ la diferencia buscada. Aunque φ sea desconocida, los pares de lecturas caen sobre la elipse

$$x^2 + y^2 - 2xy\,c = 1 - c^2, \qquad c = \cos 2\delta,$$

de modo que la diferencia se lee de la *forma* de la nube, sin controlar la fase común (Figura 8.2). Para dos relojes de estroncio separados 1 m, $2\delta = 2\pi\nu\, gh\, t/c^2 = 0{,}294$ rad en un segundo.

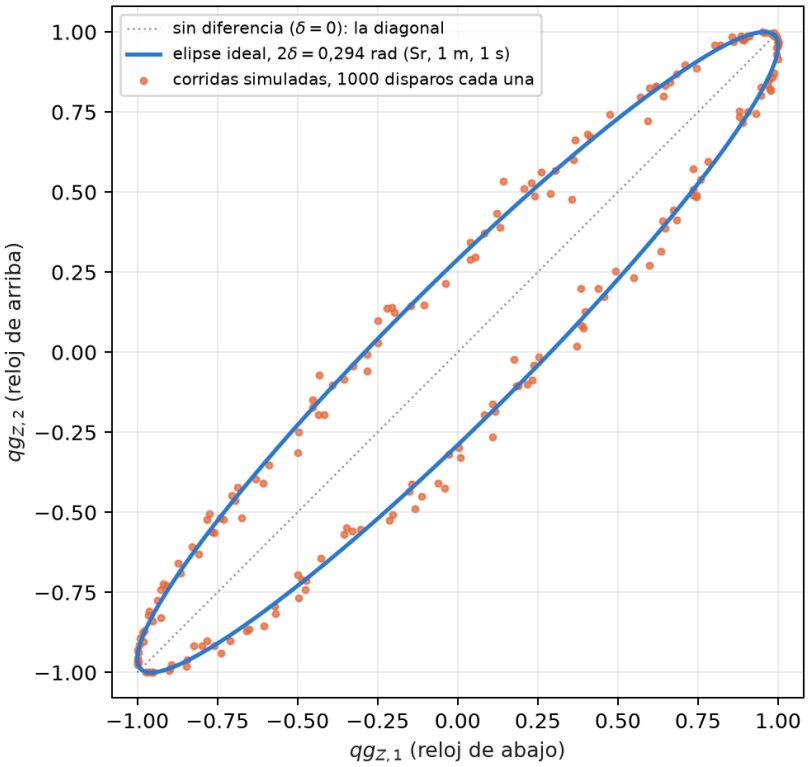


Figura 8.2: Lecturas de dos relojes con una fase común aleatoria. La diferencia de altura abre la diagonal en una elipse; su forma da la diferencia de fase sin conocer la fase común.

El ajuste de la elipse necesita los cuadrados de las lecturas, y ahí interviene el estimador insesgado de qg^2 del capítulo 4: sin la corrección, el sesgo del ruido de disparo achata la elipse. Las cuatro predicciones registradas se cumplieron (§126):

Tabla 8.1: Comparación de relojes por ajuste de elipse, simulada.

prueba	resultado
sesgo relativo, 1000 disparos, 200 corridas, cuatro valores de δ	+0,09 %, +0,12 %, +0,05 %, −0,07 %
desvío del ajuste de elipse frente al estimador de momentos ($\delta = 0{,}15$)	0,0022 frente a 0,0075
sesgo con 100 disparos, sin y con la corrección	+11,8 % y +0,9 %
estroncio, 1 m, 1 s	$\delta = 0{,}1471$; estimado $0{,}1472 \pm 0{,}0022$ (68σ)

En este modelo idealizado, la dispersión equivale a unos 1,5 cm de altura cada 200 corridas. Los límites están declarados: sin decoherencia del láser durante el tiempo de Ramsey, con contraste 1 y ruido de proyección binomial.

8.4. Sensado Ramsey: dónde operar

Un interferómetro de Ramsey convierte una fase en una probabilidad: $qg = a + bV\cos(\varphi - \alpha)$, con visibilidad V, punto de operación α y el mapa de lectura (a, b) del capítulo 27. Con lectura ideal, la información por disparo sobre la fase es

$$F = \frac{V^2 - qg^2}{1 - qg^2}.$$

Con $V = 1$ es plana, $F = 1$ en todas partes: la ganancia $1/(1 - qg^2)$ de los polos se cancela exactamente con el jacobiano. Con $V < 1$ el óptimo es el centro de la franja, $qg = 0$, y la información se anula en la franja brillante (Figura 8.1). Es la práctica conocida de operar en cuadratura, escrita en qg (§36). Tres matices medidos:

- **La asimetría de lectura corre el óptimo, pero no importa:** la ganancia de moverse al nuevo óptimo es de 0,17 % con la lectura calibrada, y de 1,6 % incluso con un error de lectura de 10 %.

- **Con pocos disparos ayuda una previa:** con 10 disparos, la media posterior bayesiana es unas 2 veces mejor que la inversión directa, porque el rango previo de la fase aporta información.
- **Con visibilidad 0,9, operar en el polo empeora con más disparos** (el error escalado pasa de 1,09 a 2,50 entre 10 y 1000 disparos): allí las fases pequeñas se vuelven invisibles. El centro de la franja sigue su cota (1,11–1,24, con cota 1,12).

8.5. Metrología GHZ: cuándo el entrelazamiento gana

Con N qubits se puede medir una frecuencia ω de dos maneras: N relojes de Ramsey independientes, o un estado GHZ, cuya paridad $X_1 \cdots X_N$ es un único valor qg de todo el registro, $qg_P = V_N \cos(N\omega t)$, que oscila N veces más rápido. La ventaja se paga con la visibilidad, que cae como la N-ésima potencia de la de un qubit. En el centro de la franja la información por disparo es V^2, y por unidad de tiempo (§58):

$$\text{independientes: } N\,t\,e^{-2t/T_2}(1-2e)^2, \qquad \text{GHZ: } N^2\,t\,e^{-2Nt/T_2}(1-2e)^{2N},$$

con e el error de lectura por qubit. Optimizando el tiempo de interrogación:

Tabla 8.2: Ganancia de la tasa de información de Fisher, GHZ sobre qubits independientes.

	markoviano, $e=$			gaussiano, $e=$		
N	$e=0$	0,002	$e=0{,}01$	$e=0$	0,002	$e=0{,}01$
2	1,000	0,992	0,960	1,414	1,403	1,358
10	1,000	0,930	0,695	3,162	2,942	2,198
30	1,000	0,793	0,310	5,477	4,341	1,697
100	1,000	0,452	0,018	10,00	4,522	0,183

La tabla resume tres resultados conocidos, aquí en una sola lectura qg. Con desfase markoviano no hay ganancia para ningún N (Huelga et al. 1997), y con error de lectura los qubits independientes son estrictamente mejores. Con desfase gaussiano, lento, la ganancia crece como $\sqrt{N}$, el límite tipo Zenón (Matsuzaki et al. 2011; Chin et al. 2012). Y la lectura la limita: la paridad arrastra $(1-2e)^N$, de modo que hay un tamaño óptimo del estado GHZ, más allá del cual agregar qubits empeora la medición (Figura 8.3).

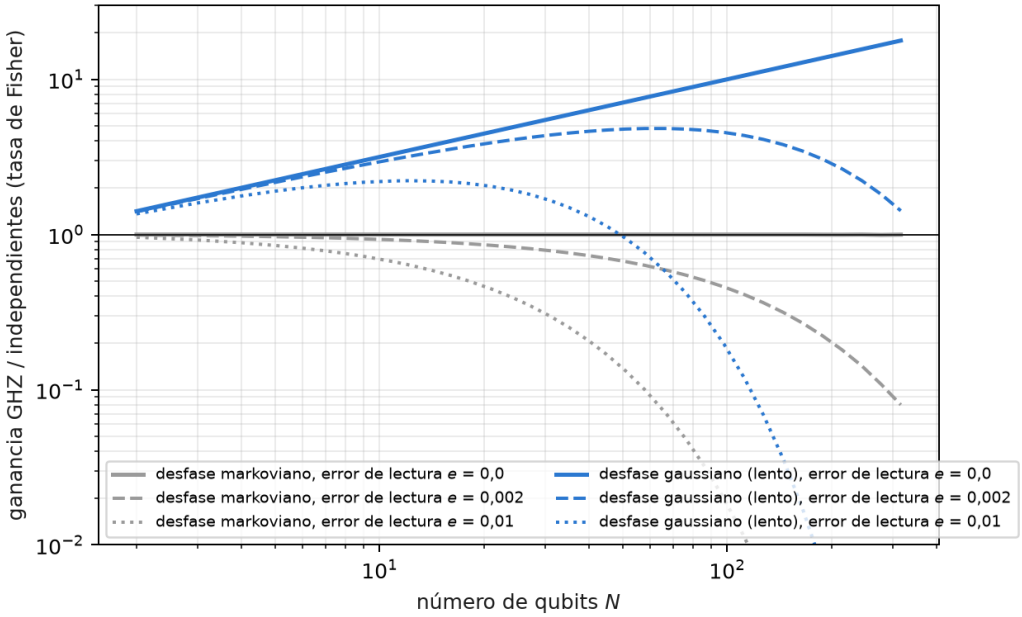


Figura 8.3: La ganancia del estado GHZ según el tipo de desfase y el error de lectura. Con desfase markoviano no hay ganancia para ningún N; con desfase gaussiano crece como √N, hasta que el error de lectura, elevado a la N, la consume.

8.6. Estados térmicos: $qg_Z = \tanh(\beta h)$

Un qubit con $H = -hZ$ en equilibrio a temperatura T (con $k_B = 1$) está en el estado de Gibbs, y su sesgo polar es

$$qg_Z = \tanh(\beta h), \qquad \beta = 1/T.$$

Toda la termodinámica del qubit es entonces función de una sola lectura (§25):

Tabla 8.3: Termodinámica de un qubit en unidades qg.

magnitud	en qg
energía	$U = -h\, qg$
entropía (bits)	$S = qg_S(qg)$, exacta porque ρ es diagonal en Z
energía libre	$F = -T \ln\!\left(2/\sqrt{1-qg^2}\right)$
capacidad calorífica	$C/k_B = \operatorname{artanh}(qg)^2\,(1-qg^2)$
ángulo de preparación	$\theta = \arccos(qg) = \pi/2 - \mathrm{gd}(\beta h)$ (función de Gudermann)

Termometría. Una medición en Z es una medición de energía, y por lo tanto la óptima sobre un estado de Gibbs; su información de Fisher sobre T es C/T^2. La mejor precisión relativa está en el máximo de la capacidad calorífica:

$$qg \cdot \operatorname{artanh}(qg) = 1 \quad \Rightarrow \quad qg^* = 0{,}8336, \qquad \beta h = 1{,}1997,$$

el pico de la anomalía de Schottky, el punto de operación óptimo conocido de un termómetro de dos niveles (Correa et al. 2015), aquí como una condición de una línea sobre la lectura: $m^* = +833{,}6$ m-qg, un ángulo de $33{,}53^\circ$ (93,2 qga). La sección es una reescritura exacta de termodinámica de libro de texto, verificada contra $e^{-\beta H}$ a $5 \cdot 10^{-12}$; no se esperaba ni se encontró una ventaja.

8.7. Sin qang y con qang

Tabla 8.4: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
resolución de una lectura	varianza de $\langle Z\rangle$, $(1-\langle Z\rangle^2)/N$, distinta en cada punto	información 1 por disparo en el ángulo; $\sigma_m = 1000\lvert\sin\theta\rvert/\sqrt{N}$	es la **cota de Cramér–Rao** de siempre; el ángulo la vuelve uniforme
optimizar un circuito variacional	descenso en los ángulos de las compuertas	descenso en coordenadas qg: **no converge** (0 de 20); gradiente natural con correladores qg_{YY}: 1,3× a 4,6×	**en contra** de usar qg_Z como coordenada; la ganancia es de la **métrica**, no de qang
comparar dos relojes	ajuste de elipse con cuadrados ingenuos: sesgo +11,8 % con 100 disparos	con qg^2 insesgado: +0,9 %	**a favor** del estimador; es la corrección estándar, aplicada en la escala qg
punto óptimo de termometría	máximo de la capacidad calorífica (Schottky)	$qg\cdot\operatorname{artanh}(qg) = 1$, $qg^* = 0{,}8336$	**mismo punto**; qang lo da como una condición de una línea sobre la lectura
ganancia GHZ	tasas de Fisher	las mismas tasas, con una paridad qg	**ninguna**: los tres resultados son conocidos

Balance. En metrología qang ordena: pone la cota de Cramér–Rao en una coordenada plana y da condiciones de una línea. El único resultado contra la coordenada qg es explícito: para optimizar, el ángulo y la métrica, no qg_Z.

8.8. En código

```
from qang import probability

r = probability.analyze(750, 1000)  # 750 ceros en 1000 disparos, en todas las unidades q
# p0, qg_Z, m = 500.0 [444.5, 551.7] m-qg, theta = 60.0° [56.5°, 63.6°], qg_S, con interva
```

8.9. Resumen

- Por disparo, la información es 1 en el ángulo y $1/(1-qg_Z^2)$ en qg_Z; la resolución en m-qg es $1000|\sin\theta|/\sqrt{N}$, la cota de Cramér–Rao.
- La métrica del gradiente natural en un ansatz real tiene diagonal $\frac{1}{4}$ y correladores qg_{YY}; optimizar en coordenadas qg no converge, y la ganancia viene de la métrica.
- Dos relojes con fase común aleatoria trazan una elipse; su forma da el corrimiento gravitatorio a 1 m con 68σ en el modelo, si se corrige el sesgo de los cuadrados.
- Un interferómetro de Ramsey con visibilidad $V<1$ se opera en el centro de la franja; su información es $(V^2-qg^2)/(1-qg^2)$.
- El estado GHZ no gana con desfase markoviano, gana $\sqrt{N}$ con desfase lento y lo pierde con el error de lectura elevado a la N.
- Un qubit térmico tiene $qg_Z=\tanh(\beta h)$; su mejor punto de termometría es $qg^*=0{,}8336$, el pico de Schottky.

Notas bibliográficas

La geometría de la información de un estado cuántico es Braunstein y Caves (1994), y el gradiente natural, Amari (1998). El método de campos separados es Ramsey (1950); para metrología cuántica en general, véase Giovannetti et al. (2004). Los relojes ópticos que miden la dilatación gravitatoria son Chou et al. (2010). Los resultados GHZ bajo desfase son Huelga et al. (1997), Matsuzaki et al. (2011) y Chin et al. (2012), y la termometría óptima con un sistema de dos niveles, Correa et al. (2015). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte III

III. Física de neutrinos, oscilaciones y simulación cuántica (`qang.neutrino`)

9 Cinemática cuántica de la oscilación de sabor en el vacío

Un neutrino nace y se detecta en un estado de sabor (ν_e, ν_μ o ν_τ), pero viaja en estados de masa. Como los estados de masa acumulan fases distintas, el sabor cambia por el camino: es la oscilación de sabor, y en el vacío es exactamente una rotación de dos o tres niveles. Este capítulo la escribe sobre la base del capítulo 1. Una probabilidad de oscilación es una probabilidad qang como cualquier otra, con su ángulo, su lectura en mili-qang y su barra de error; la oscilación de dos sabores es una precesión sobre un cono de la esfera; y los tres sabores caben en tres qubits con un circuito que conserva el peso, de modo que el filtro qg se aplica. El capítulo termina con el primer dato de hardware real del proyecto, tomado en IQM Garnet.

Todo lo de este capítulo es en el vacío. Una línea de base de 1300 km atraviesa la Tierra y tiene efectos de materia apreciables; esos efectos son el tema del capítulo 10.

9.1. Desde la base: la probabilidad de oscilación en m-qg

Con dos sabores en un qubit, $|0\rangle = \nu_e$ y $|1\rangle = \nu_\mu$, la probabilidad de sobrevivir es $p_0 = 1 - P$, con $P = P(\nu_e \to \nu_\mu)$. La ecuación de probabilidad del capítulo 1 le asigna todas sus lecturas:

$$qg_Z = 1 - 2P, \qquad m = 1000\,(1 - 2P)\ \text{m-qg}, \qquad \vartheta = \arccos qg_Z = 2\arcsin\sqrt{P},$$

y su resolución por disparos, $\sigma_m = 1000\,|\sin\vartheta|/\sqrt{N} = 2000\sqrt{P(1-P)}/\sqrt{N}$ m-qg. Un 1 % de probabilidad de aparición son 20 m-qg; una diferencia de probabilidad de 0,025 son 50 m-qg. Con tres sabores en tres qubits (más abajo) cada qubit lleva la probabilidad de un sabor y se lee igual: $m_\beta = 1000\,(1 - 2P_\beta)$.

La escala no agrega física: es la misma probabilidad. Lo que agrega es una regla común para comparar la señal con el ruido de disparo, y, como se ve enseguida, una coordenada en la que el ángulo de mezcla se lee directamente.

9.2. La oscilación como rotación sobre un cono

En la base de sabor, ir a la base de masa es una rotación $R_Y(-2\theta)$, con θ el ángulo de mezcla; en la base de masa los dos estados adquieren la fase relativa

$$\Delta = \frac{\Delta m^2 L}{2E} = 2 \times 1{,}267 \, \frac{\Delta m^2[\mathrm{eV}^2]\, L[\mathrm{km}]}{E[\mathrm{GeV}]},$$

que es un $R_Z(\Delta)$; y volver al sabor es $R_Y(2\theta)$. El circuito de un qubit es entonces $R_Y(2\theta)\, R_Z(\Delta)\, R_Y(-2\theta)$, y su lectura (§151)

$$qg_Z = \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \, \cos\Delta, \qquad P(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \, \sin^2 \frac{\Delta}{2}.$$

La primera fórmula es la **ley de cosenos esférica**. El eje de masa está a 2θ del polo; el vector de Bloch, que parte del polo, precesiona alrededor de ese eje sobre un cono de semiángulo 2θ, y después de girar Δ está a una distancia de arco $\vartheta = \arccos qg_Z$ del polo. Es el triángulo esférico de dos lados 2θ y ángulo comprendido Δ. El ángulo qang de la lectura es la distancia recorrida sobre la esfera (Figura 9.1).

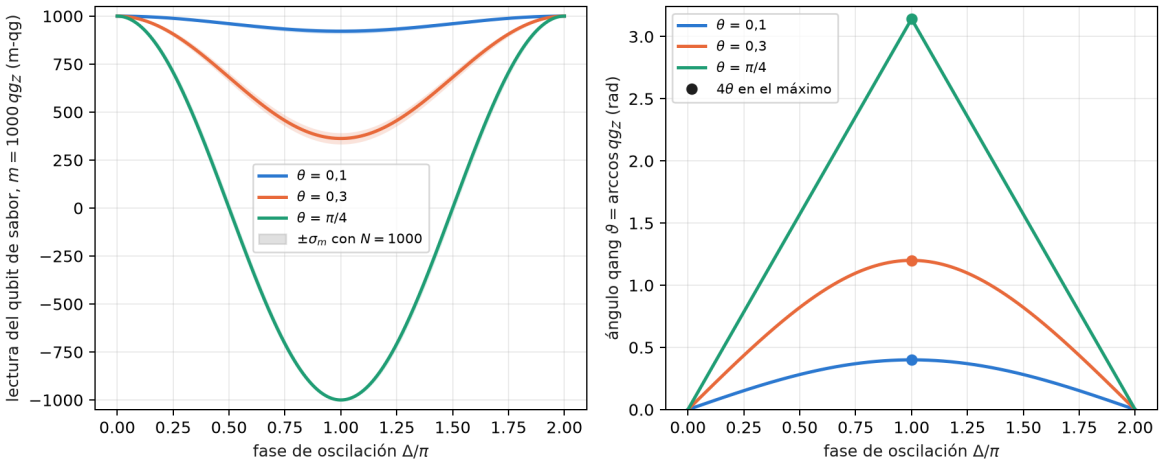


Figura 9.1: Dos sabores sobre un qubit. A la izquierda, la lectura en m-qg en función de la fase, con la banda de ruido de disparo para 1000 disparos. A la derecha, el ángulo qang $\vartheta = \arccos qg_Z$: en el máximo de oscilación ($\Delta = \pi$) vale exactamente 4θ.

9.3. El ángulo de mezcla es un cuarto del ángulo qang

En el máximo de oscilación, $\Delta = \pi$, la ley de cosenos se reduce a $qg_Z = \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \cos 4\theta$, y por lo tanto

$$\theta_{\text{mezcla}} = \frac{\vartheta}{4} = \frac{\arccos qg_Z}{4} \qquad (\theta \le \pi/4).$$

El ángulo de mezcla se lee como un cuarto de ángulo qang, sin invertir ningún $\sin^2$. Hay que decir con precisión qué es y qué no es esto. Es exacto sólo en el máximo: en otra fase la relación entre ϑ y θ no es lineal, y la trigonometría sigue ahí. Y no es física nueva: es la transformación arcoseno de una proporción del capítulo 4 (§125), que en el máximo coincide con la geometría del cono.

La condición $\theta \le \pi/4$ tampoco es un detalle. Para $\theta > \pi/4$ el ángulo 4θ pasa de π y arc cos devuelve $2\pi - 4\theta$, es decir, $\pi/2 - \theta$. Como $\sin^2 2\theta$ es simétrica bajo $\theta \to \pi/2 - \theta$, ninguna medición de dos sabores distingue los dos valores: es la **degeneración de octante**, la misma que tiene el ángulo atmosférico θ_{23} (49° en los valores usados aquí; la lectura en el máximo daría 41°). La escala qg la hace visible, no la resuelve.

9.4. Barras de error que no dependen del ángulo

El ángulo qang hereda la varianza estabilizada de la transformación arcoseno: su desvío por ruido de disparo es $1/\sqrt{N + \frac{1}{2}}$, el mismo en toda la esfera (capítulo 4, §125). Dividido por cuatro:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{4\sqrt{N + \frac{1}{2}}},$$

que no depende de θ. Con 1000 disparos es 0,0079 rad (0,45°), es decir, 1,26 qga en la escala angular del capítulo 1 (Sección 1.4), donde la relación es igual de simple: $\theta_{\text{mezcla},qga} = \vartheta_{qga}/4$, y la condición $\theta \le \pi/4$ se lee $\theta \le 125$ qga. Leída en mili-qang, la misma medición sí depende del punto: para $\theta = 0{,}1$ el máximo está en $m = 1000 \cos 0{,}4 = 921$ m-qg con $\sigma_m = 12$ m-qg. La predicción registrada (N1) se cumplió con 2000 repeticiones binomiales:

Tabla 9.1: El ángulo de mezcla leído como $\arccos(qg_Z)/4$ en el máximo, 1000 disparos, 2000 repeticiones.

θ (rad)	0,1	0,3	0,5	0,7
media de $\hat{\theta}$	0,0999	0,2999	0,5000	0,7006
desvío de $\hat{\theta}$ (teoría 0,0079)	0,0079	0,0077	0,0078	0,0081

9.5. Tres sabores en tres qubits

Con tres sabores, el estado de sabor k es el estado de peso 1 con sólo el qubit k excitado: $\nu_e = |100\rangle$, $\nu_\mu = |010\rangle$, $\nu_\tau = |001\rangle$ (en el orden de qubits 0, 1, 2). La matriz PMNS en su forma estándar,

$$U = R_{23}\, U_\delta\, R_{13}\, U_\delta^\dagger\, R_{12}, \qquad U_\delta = \mathrm{diag}(1, 1, e^{i\delta_{CP}}),$$

es tres rotaciones reales y dos fases. Cada rotación R_{ij} es una compuerta RBS (un $XX + YY$) entre los qubits i y j; cada fase es una compuerta de fase sobre un qubit; y la propagación, en la base de masa, es una compuerta de fase por qubit. **Todas las compuertas conservan el peso de Hamming**, de modo que una medición con peso distinto de 1 es un error, y se puede descartar: es el filtro de simetría qg del capítulo 21 (§77). Para antineutrinos basta $\delta_{CP} \to -\delta_{CP}$. El circuito reproduce las probabilidades analíticas del vacío a 10^{-15}.

La Figura 9.2 muestra el caso de la predicción: un ν_μ inicial, $L = 1300$ km (una línea de base del tipo de DUNE), $\delta_{CP} = -\pi/2$ y valores de mezcla del tipo de NuFIT en ordenamiento normal. El primer máximo de oscilación está en 2,63 GeV, donde la supervivencia cae a $P(\nu_\mu \to \nu_\mu) = 0{,}013$, es decir, $m_\mu = 974$ m-qg.

9.6. Supresión del ruido con el filtro qg

El circuito de tres sabores, compilado, tiene 18 compuertas de dos qubits en IBM. Se corrió en **modelos de ruido simulados** de tres dispositivos (FakeBrisbane con compuertas ECR, FakeTorino y FakeFez con CZ), con 8 energías entre 0,8 y 5 GeV y 4000 disparos. El error es la media de $|\hat{P} - P|$ sobre los tres sabores y las ocho energías (§151):

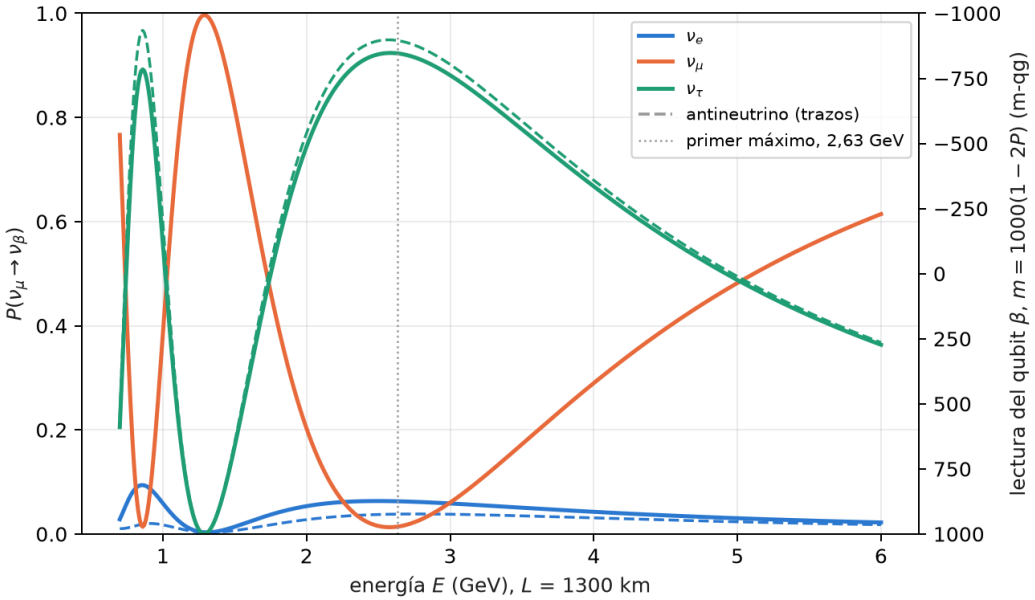


Figura 9.2: Probabilidades de tres sabores para un ν_μ inicial a 1300 km, en el vacío; a la derecha, la lectura en m-qg del qubit de cada sabor. Los trazos son antineutrinos: la supervivencia ν_μ es idéntica (CPT), la aparición de ν_e no (CP).

Tabla 9.2: Error medio de las probabilidades de tres sabores, modelos de ruido simulados.

dispositivo simulado	crudo	corrección de lectura	filtro qg	filtro + lectura	conservado	crudo / filtro + lectura
FakeBrisbane	0,048	0,038	0,014	0,013	85–87 %	3,8×
FakeTorino	0,034	0,028	0,010	0,010	90–92 %	3,4×
FakeFez	0,025	0,024	0,009	0,009	93–94 %	3,0×

El error baja entre 3,0 y 3,8 veces, y casi toda la ganancia es del filtro, no de la corrección de lectura. Las cuatro predicciones registradas se cumplieron, incluida la posición del mínimo de $P(\nu_\mu \to \nu_\mu)$ en 2,6 GeV en los tres dispositivos.

En hardware real (§165). El mismo circuito se corrió en IQM Garnet, un procesador superconductor de 20 qubits, compilado a sus compuertas nativas con 12 CZ; 8 energías, 300 disparos cada una, con predicciones registradas antes del trabajo. Las cuatro se cumplieron, y la Figura 9.3 muestra los datos:

Tabla 9.3: El circuito de tres sabores en IQM Garnet, 8 × 300 disparos, sin corrección de lectura.

prueba	resultado
error con filtro menor que el crudo	0,039 < 0,062
razón crudo / filtro $\geq 1{,}5$	1,59 (por poco)
mínimo filtrado de $P(\nu_\mu \to \nu_\mu)$ en 2,6 GeV	sí; **el crudo lo pone en 0,8 GeV**
fracción conservada $\geq 0{,}5$	0,88

Tres lecturas de este dato. En el hardware real **el filtro devuelve el máximo de oscilación a su lugar**. El chip anduvo mejor que su modelo simulado (0,062 crudo contra 0,126) y por eso el filtro ganó menos (1,6× contra 2,2× en el ensayo): salen menos disparos del sector, y hay menos para quitar. Y lo que queda está **dentro del sector**, donde el filtro no ve: en el máximo, $P(\nu_\mu \to \nu_\mu)$ se lee 0,10 contra 0,013 exacto (unos 175 m-qg de diferencia), y el error de ν_τ apenas se mueve (0,062 → 0,052). Es una corrida en un día, con 300 disparos por circuito.

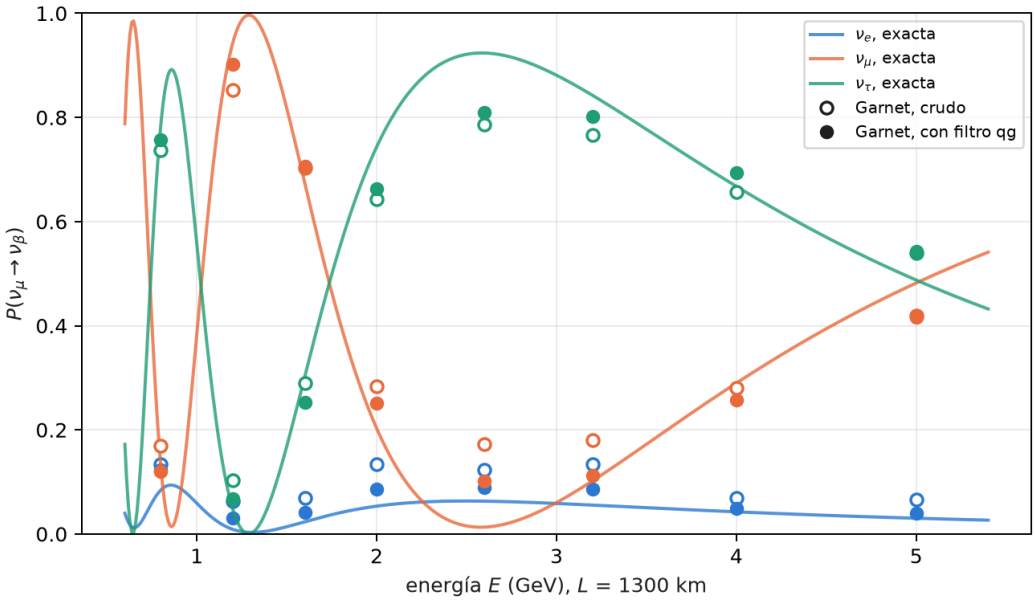


Figura 9.3: El circuito de tres sabores en IQM Garnet. Las curvas son exactas; los círculos vacíos, las lecturas crudas; los llenos, las filtradas. Sin filtro, la supervivencia ν_μ (naranja) es mínima en 0,8 GeV; con filtro, en 2,6 GeV, donde está el máximo de oscilación.

9.7. La asimetría CP en el vacío

La violación de CP aparece como una diferencia entre neutrinos y antineutrinos:

$$A_{CP} = P(\nu_\mu \to \nu_e) - P(\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_e).$$

En 2,6 GeV con $\delta_{CP} = -\pi/2$ vale 0,0250 (0,0630 contra 0,0380), es decir, **50 m-qg** en el qubit de ν_e. Con 20 000 disparos por circuito, el ruido de disparo de la diferencia es de unos 4,4 m-qg: la señal está a unos 11σ. La supervivencia, en cambio, no distingue: en el vacío CPT impone $P(\nu_\mu \to \nu_\mu) = P(\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_\mu)$ (las curvas naranjas de la Figura 9.2 coinciden).

Tabla 9.4: Asimetría CP en 2,6 GeV, exacta 0,0250 (50 m-qg), 20 000 disparos, modelos de ruido simulados.

dispositivo simulado	crudo	filtro + lectura
FakeBrisbane	0,024 (48 m-qg)	0,026 (51 m-qg)
FakeTorino	0,017 (35 m-qg)	0,022 (44 m-qg)
FakeFez	0,020 (41 m-qg)	0,022 (44 m-qg)

La asimetría sobrevive incluso sin el filtro. Es la diferencia entre dos circuitos casi idénticos (sólo cambia el signo de dos fases), así que el corrimiento que el ruido produce en común se cancela en la resta, igual que en el clasificador de fidelidad de §149. Lo que no se cancela es la contracción, que achica las dos probabilidades y con ellas la diferencia: por eso el crudo de FakeTorino lee 35 m-qg y no 50. El filtro reduce el error a la mitad en los dispositivos con CZ.

9.8. Qué es y qué no es el vínculo entre neutrinos y qang

Es modelado: la oscilación es una rotación, y el ángulo qang lee el ángulo de mezcla directamente en el máximo, con una barra de error conocida. No elimina la trigonometría en general, y no acelera los métodos variacionales para gases densos de neutrinos: esos son problemas de muchos cuerpos (capítulo 10). Los límites están declarados: vacío solamente, parámetros fijos, ruido de dispositivos simulado salvo la corrida única de IQM Garnet.

9.9. Sin qang y con qang

Tabla 9.5: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
leer el ángulo de mezcla en el máximo	$\theta = \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{P}$ y método delta	$\theta = \arccos(qg_Z)/4$, $\sigma_\theta = 1/(4\sqrt{N+\frac{1}{2}})$	**mismo orden principal**: el método delta también da $1/(4\sqrt{N})$; qang lo obtiene sin derivar, con la corrección $+\frac{1}{2}$ para pocos disparos; en $P = 0$ o 1 exactos los dos necesitan los intervalos del capítulo 4
ver la degeneración de octante	simetría de $\sin^2 2\theta$	la lectura en el máximo devuelve $\pi/2 - \theta$	**ninguna**: la escala la hace visible, no la resuelve
comparar la señal CP con el ruido	$\Delta P = 0{,}025$ frente a σ_P	50 m-qg frente a 4,4 m-qg	**unidad**: el cociente (11σ) es el mismo
reducir el error del circuito de tres sabores	corrección de lectura: poco efecto	filtro de peso: 3,0–3,8× (simulado), 1,6× en Garnet	la ganancia es del **filtro de simetría**, no de la escala qang

Balance. La geometría del cono y la lectura del ángulo de mezcla son la contribución propia de qang, con una barra de error que no hay que derivar. La mejora contra el ruido, que es la cifra más grande del capítulo, pertenece al filtro.

9.10. En código

```
import math
from qang import neutrino as nu

# dos sabores: la lectura y el ángulo de mezcla en el máximo
q = nu.two_flavour_qg_z(theta=0.1, delta=math.pi)  # cos(0.4) = 0.921 -> 921 m-qg
nu.mixing_angle_from_maximum(q)                    # 0.1
nu.mixing_angle_std(1000)                          # 0.0079 rad

# tres sabores: probabilidades exactas, circuito de peso 1 y asimetría CP
P = nu.three_flavour_probabilities(L=1300, E=2.6, delta_cp=-math.pi / 2)  # P[mu] = [0.0
qc = nu.three_flavour_circuit("mu", L=1300, E=2.6, delta_cp=-math.pi / 2)
nu.cp_asymmetry(L=1300, E=2.6, delta_cp=-math.pi / 2)              # 0.0250
```

9.11. Resumen

- Una probabilidad de oscilación P se lee como $m = 1000(1 - 2P)$ m-qg, con ángulo $2 \arcsin \sqrt{P}$ y resolución $2000\sqrt{P(1-P)/N}$ m-qg.
- Con dos sabores, $qg_Z = \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos \Delta$ es la ley de cosenos esférica de la precesión sobre un cono de semiángulo 2θ.
- En el máximo, $\theta = \arccos(qg_Z)/4$ con desvío $1/(4\sqrt{N + \frac{1}{2}})$, independiente de θ; para $\theta > \pi/4$ la lectura devuelve $\pi/2 - \theta$ (degeneración de octante).
- Tres sabores son tres qubits en el sector de peso 1; PMNS son tres RBS y dos fases, y el filtro qg baja el error 3,0–3,8 veces en modelos simulados.
- En IQM Garnet, el filtro gana 1,6× y devuelve el máximo de oscilación a 2,6 GeV; el error que queda está dentro del sector.
- La asimetría CP en 2,6 GeV son 50 m-qg y sobrevive sin filtro, porque el corrimiento común se cancela en la resta.

Notas bibliográficas

La matriz de mezcla de leptones viene de Pontecorvo (1968) y Maki et al. (1962); los parámetros de oscilación usados son del tipo del ajuste global NuFIT (Esteban et al. 2020) y del *Review of Particle Physics* (Navas et al. 2024). La compuerta

RBS es la de las redes ortogonales de Landman et al. (2022). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

10 Efectos de materia, neutrinos solares y oscilaciones colectivas

El capítulo 9 dejó al neutrino en el vacío. Pero un haz de 1300 km atraviesa la Tierra, los neutrinos solares nacen en el centro del Sol, y en una supernova los neutrinos son tan densos que interactúan entre sí. En los tres casos el medio agrega un término al hamiltoniano de sabor, y la pregunta del capítulo es la misma en los tres: **qué número sigue conservado**, porque eso decide si el filtro qg se aplica, y en qué base. Sobre la base del capítulo 1, cada efecto del medio se lee como un corrimiento en mili-qang, en la misma escala que el ruido de disparo.

10.1. Desde la base: el medio como corrimiento en m-qg

Cada qubit de sabor (o de masa) se lee como en el capítulo 9, $m = 1000\,(1-2P)$ m-qg, de modo que un efecto del medio que cambia una probabilidad en δP es un corrimiento de $2000\,\delta P$ m-qg, comparable directamente con la resolución $\sigma_m = 2000\sqrt{P(1-P)/N}$. Tres ejemplos de este capítulo, en esa escala:

Tabla 10.1: Efectos del medio como corrimientos en mili-qang.

efecto	δP	en m-qg
materia sobre $P(\nu_\mu \to \nu_e)$, 1300 km, 2,6 GeV, ordenamiento normal	0,063 → 0,087	48
asimetría falsa de la materia con $\delta_{CP} = 0$	0,042	84
caída MSW de P_{ee} solar, 0,5 → 10 MeV, leída en el qubit ν_2	p_2: 0,35 → 0,93	1173

Con 1000 disparos y $P \approx 0{,}07$, la resolución es de unos 16 m-qg: el efecto de la Tierra se ve a 3σ en un solo circuito, y la caída solar es casi toda la escala.

10.2. El efecto MSW en la Tierra

Los electrones de la Tierra dispersan los ν_e hacia adelante y les suman al hamiltoniano de sabor un potencial $A = 2\sqrt{2}\,G_F N_e E$, que en las unidades de oscilación es

$$A = 1{,}52 \times 10^{-4}\, Y_e\, \rho[\mathrm{g/cm^3}]\, E[\mathrm{GeV}]\ \mathrm{eV}^2,$$

con signo opuesto para los antineutrinos (Mikheyev–Smirnov–Wolfenstein). En la corteza ($\rho = 2{,}85$ g/cm³, $Y_e = 0{,}5$) y a 2,6 GeV, $A = 5{,}6 \times 10^{-4}$ eV², un 22 % de Δm^2_{31}: no es una corrección menor.

El potencial actúa sólo sobre ν_e, es decir, es una fase sobre el qubit 0. El circuito alterna el paso exacto de vacío del capítulo 9 con esa fase (Trotter de segundo orden, o de Strang), y **cada compuerta sigue conservando el peso**: el filtro qg se aplica igual que en el vacío (§152). Con $L = 1300$ km y entre 0,8 y 5 GeV:

Tabla 10.2: El efecto MSW como circuito de Trotter, modelos de ruido simulados.

prueba	resultado
M1 error de Trotter sin ruido, $r = 2$ / 4 (pedido $< 0{,}005$ / $< 0{,}001$)	0,0052 / 0,0011 — **falló** por poco
M2 asimetría sólo de materia con $\delta_{CP} = 0$, 2,6 GeV	0,042 (la señal CP del vacío era 0,025)
M3 mejor error crudo / filtro + lectura	Brisbane 0,046 / 0,017, Torino 0,027 / 0,009, Fez 0,023 / 0,014 (mediana 2,8×)
M4 pasos óptimos con filtro $\geq$ sin filtro	$r^* = 1$ en todos los casos (se cumple en vacío)
M5 $A_{CP}(\delta_{CP} = 0)$, filtro + lectura, $r = 2$	0,035, 0,035, 0,029 (exacta 0,042; Trotter $r = 2$: 0,033)

Tres lecciones. **La materia imita la violación CP**: con $\delta_{CP} = 0$, donde el vacío no da ninguna asimetría, la Tierra produce 84 m-qg de diferencia entre ν y $\bar{\nu}$, más que los 50 m-qg de la señal CP del capítulo 9; por eso los experimentos de línea de base larga tienen que modelar la materia, y el circuito filtrado la ve. **No hay compromiso de profundidad**: un solo paso de Trotter ya tiene menos error (0,012) que el ruido, así que $r^* = 1$ con o sin filtro, y M4 se cumple sólo porque ambos valen 1. Y **la distancia de M5 al valor exacto es error de Trotter, no ruido**: los valores filtrados están a 0,004 del valor de Trotter con $r = 2$.

10.3. El ordenamiento de masas leído a través de la materia

El vacío no distingue el signo de Δm^2_{31}; la materia sí, porque lo que importa es el signo del producto $A\,\Delta m^2_{31}$. En ordenamiento normal ($\Delta m^2_{31} > 0$) la materia refuerza $\nu_\mu \to \nu_e$ y debilita la de antineutrinos; en el invertido, al revés (Figura 10.1). Con los valores exactos a 2,6 GeV:

Tabla 10.3: $P(\nu_\mu \to \nu_e)$ a 1300 km y 2,6 GeV, $\delta_{CP} = -\pi/2$.

	ν, vacío	ν, materia	$\bar{\nu}$, vacío	$\bar{\nu}$, materia
normal	0,063	0,087	0,038	0,021
invertido	0,063	0,041	0,038	0,058

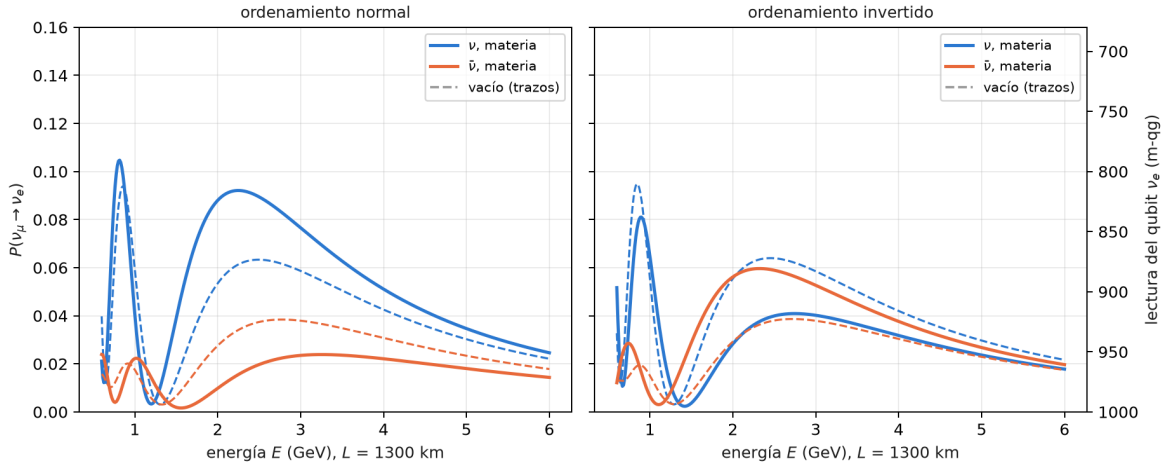


Figura 10.1: $P(\nu_\mu \to \nu_e)$ a 1300 km en materia (continuo) y en vacío (trazos), para neutrinos y antineutrinos, en los dos ordenamientos. A la derecha, la lectura del qubit ν_e en m-qg. El signo del corrimiento de la materia se invierte con el ordenamiento.

En los modelos de ruido simulados, con el circuito de Trotter de $r = 2$ y el filtro, **el ordenamiento se lee bien en los tres dispositivos**, con el signo correcto de la asimetría $\nu/\bar{\nu}$ (§163). Los valores filtrados quedan 0,010–0,033 por encima de la referencia del circuito sin ruido (la predicción O3 falló): el ruido dentro del sector corre probabilidad hacia los otros sabores. Pero el sesgo es común, y la diferencia entre ordenamientos sobrevive: 0,034–0,036 contra 0,037 en la referencia.

10.4. Neutrinos solares: el Sol entero es una sola rotación

Un ν_e nace en el núcleo del Sol, donde $(\rho Y_e) \approx 100$ g/cm³, y sale hacia el vacío. A energías bajas la materia apenas importa y llega a la Tierra con la probabilidad promediada del vacío; por encima de la resonancia (unos 2 MeV en el núcleo), la densidad central gira el ángulo de mezcla en materia θ_m casi hasta 90°, el neutrino sigue adiabáticamente el autoestado pesado y sale del Sol como ν_2. Las fases se pierden en el camino a la Tierra, así que lo que llega es una población en la base de masa, y la probabilidad de supervivencia (§156)

$$P_{ee} = c_{13}^4 \left(\cos^2\theta_{12}\, p_1 + \sin^2\theta_{12}\, p_2\right) + s_{13}^4$$

es **lineal en qg_Z del qubit** ν_2. Cae de 0,54 a 0,30 entre 0,5 y 15 MeV (Figura 10.2); en el qubit ν_2 eso es pasar de $+304$ a -868 m-qg, más de la mitad de la escala.

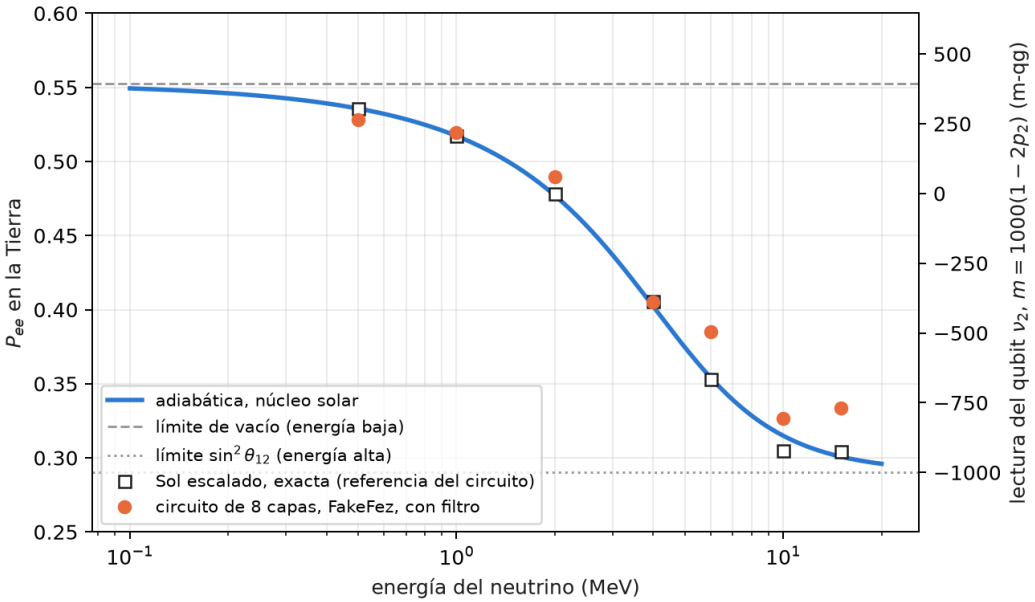


Figura 10.2: Probabilidad de supervivencia de los ν_e solares. La curva es la conversión adiabática desde el núcleo; los cuadrados, la referencia exacta del Sol escalado que usa el circuito; los círculos, el circuito de 8 capas en el modelo de ruido de FakeFez con el filtro. A la derecha, la misma lectura en m-qg del qubit ν_2.

El circuito usa dos sabores efectivos (ν_3 desacoplado; coincide con tres sabores a 0,001) y un Sol escalado: un perfil exponencial de 100 km de altura de escala, cortado en r capas uniformes en θ_m. Cada capa es un propagador exacto de 2×2, $R_Z \cdot \mathrm{RBS} \cdot R_Z$ sobre dos qubits en el sector de peso 1, y el filtro se aplica. Las seis predicciones registradas se cumplieron:

Tabla 10.4: Neutrinos solares en modelos de ruido simulados.

lectura (error medio de P_{ee} contra el circuito sin ruido)	Brisbane	Torino	Fez
capas $r = 8$, crudo / filtro + lectura	0,025 / 0,011	0,018 / 0,008	0,027 / 0,015
compilado (una sola RBS), crudo / filtro + lectura	0,008 / 0,002	0,005 / 0,002	0,006 / 0,003
un qubit, crudo / lectura	0,004 / 0,002	0,031 / 0,003	0,004 / 0,002
caída MSW $P_{ee}(0{,}5) - P_{ee}(10\ \mathrm{MeV})$, $r = 8$ filtrado (exacta 0,231)	0,218	0,218	0,202

El filtro gana 1,9–2,3× en el circuito de capas, como en la Tierra. Pero el resultado importante es otro: **la física hace innecesario el circuito**. Como las fases se pierden antes de la detección, el observable es una sola población, y el circuito compilado (todo el Sol en la única RBS que carga p_2) le gana a cualquier circuito de capas incluso sin filtro; con dos sabores, un qubit con corrección de lectura es tan bueno como cualquier otra cosa. La respuesta adiabática es clásica, $\sin^2 \theta_m$ en el núcleo. Una computadora cuántica sólo podría aportar donde la coherencia sobrevive: la regeneración día–noche en la Tierra, o los efectos colectivos de la sección siguiente.

Pendiente: el Sol real. El perfil es escalado (el real tiene una altura de escala de unos 6×10^4 km y es mucho más adiabático, con la misma respuesta adiabática), y el error de discretización de las capas (0,009 con $r = 8$) es del tamaño del ruido filtrado. La comparación con un perfil de densidad del Modelo Solar Estándar no está hecha: queda como propuesta, no como resultado.

10.5. Oscilaciones colectivas: lo que se conserva es el número de masa

En una supernova la densidad de neutrinos es tan alta que se dispersan entre sí. Con N neutrinos de dos sabores, un qubit cada uno y la aproximación de un solo ángulo, el hamiltoniano en la base de masa es

$$H_m = -\sum_i \frac{\omega_i}{2} Z_i + \frac{\mu}{2N} \sum_{i<j} \sigma_i \cdot \sigma_j,$$

con $\omega_i = \Delta m^2 / 2E_i$ y μ el acoplamiento neutrino–neutrino. La sección §151 había nombrado estos gases como un blanco natural del filtro porque "se conserva el número total de sabor". **Eso vale sólo para el término neutrino–neutrino.** El producto $\sigma_i \cdot \sigma_j$ es el mismo en cualquier base, pero el término de vacío es diagonal sólo en la base de masa: lo que se conserva es **el número de** ν_2, no el de sabor (§154). La Figura 10.3 lo muestra con la evolución exacta de cuatro neutrinos: el número de ν_2 es constante y el de ν_x se mueve, poco con el ángulo del experimento y más con un ángulo grande.

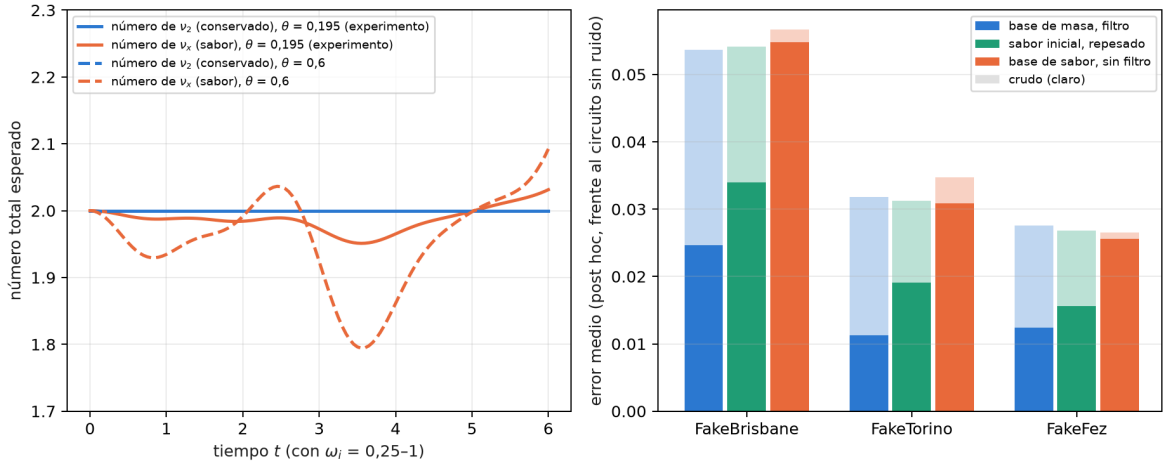


Figura 10.3: Izquierda: evolución exacta de cuatro neutrinos (ω = 0,25–1, μ = 4, inicial $\nu_e\nu_e\nu_x\nu_x$). El número de ν_2 se conserva; el de sabor no. Derecha: error de las tres lecturas en modelos de ruido simulados (análisis posterior, no registrado), crudo en claro y corregido en oscuro.

Un estado inicial de sabor es una superposición de sectores de masa con probabilidades conocidas y conservadas (para $\nu_e\nu_e\nu_x\nu_x$ con $\theta = 0{,}195$: 0,863 en el

sector de dos ν_2 y 0,067 en cada vecino). La función `reweight_sectors` reescala cada sector a su probabilidad; cuando la distribución es una delta, es el filtro.

Las siete predicciones registradas fallaron, por una sola razón: el error de Trotter sin ruido (0,095) era mayor que todo el error con ruido contra la evolución exacta (0,074–0,088), de modo que cada lectura se calificó sobre todo por el error de Trotter. Un análisis posterior, no registrado, calificado contra el circuito sin ruido, da lo que las predicciones querían medir:

Tabla 10.5: Oscilaciones colectivas, $N = 4$, análisis posterior contra el circuito sin ruido.

dispositivo simulado	base de masa, crudo / filtro	sabor inicial en base de masa, crudo / repesado	base de sabor, crudo / lectura
FakeBrisbane	0,054 / 0,025	0,054 / 0,034	0,057 / 0,055
FakeTorino	0,032 / 0,011	0,031 / 0,019	0,035 / 0,031
FakeFez	0,028 / 0,012	0,027 / 0,016	0,027 / 0,026

El filtro sobre el número de masa conservado gana 2,2–2,8×; la distribución conocida sobre sectores, 1,6–1,7×; y en la base de sabor, donde no se conserva nada, no hay ganancia más allá de la corrección de lectura. La lección para el próximo registro quedó escrita: calificar contra el circuito sin ruido cuando no se sabe que el error de Trotter es chico, o medir ese error antes de fijar las predicciones.

10.6. Sin qang y con qang

Tabla 10.6: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
cuantificar un efecto del medio	cambio de probabilidad δP	corrimiento de $2000\,\delta P$ m-qg	**unidad**: permite tabular la Tierra, la asimetría falsa y el Sol en una escala común con el ruido
leer la supervivencia solar	P_{ee} lineal en la población p_2	lineal en qg_Z del qubit ν_2	**equivalente**

acción	sin qang	con qang	diferencia
simular la Tierra con ruido	circuito de Trotter sin filtrar	con filtro de peso: 2,8× en mediana	del **filtro**, no de qang
oscilaciones colectivas	lectura en base de sabor: sin ganancia	filtro en la base de masa: 2,2–2,8× (análisis posterior)	del **número conservado**; qang no decide qué número se conserva

Balance. En este capítulo qang es la escala de presentación. Todo lo que mejora la simulación viene de identificar el número conservado y filtrar por él, y la tabla lo dice así.

10.7. En código

```
import math
from qang import neutrino as nu
from qang.sectors import reweight_sectors

# la Tierra: probabilidades exactas en materia y el circuito de Trotter que conserva el pe
P = nu.matter_probabilities(L=1300, E=2.6, delta_cp=-math.pi / 2, rho=2.85)      # P[mu,
qc = nu.matter_trotter_circuit("mu", L=1300, E=2.6, delta_cp=-math.pi / 2, rho=2.85, ste
nu.cp_asymmetry(L=1300, E=2.6, delta_cp=0.0, rho=2.85)                          # 0.042: mate
Pio = nu.matter_probabilities(1300, 2.6, -math.pi / 2, 2.85, params=nu.NUFIT_IO)   # P[m

# el Sol: la respuesta adiabática y el circuito compilado (una sola RBS)
nu.solar_pee_adiabatic(0.010)                                          # 0.315 a 10 MeV
qc_sol = nu.solar_circuit(0.010, h=100.0, X=800.0, r=8, compiled=True)

# oscilaciones colectivas: los sectores de masa conservados de un estado de sabor
nu.mass_sector_probabilities("eexx", theta=0.195)          # [0.001, 0.067, 0.863, 0.06
```

10.8. Resumen

- Un efecto del medio que cambia una probabilidad en δP es un corrimiento de $2000\,\delta P$ m-qg, comparable con el ruido de disparo en la misma escala.

- La Tierra agrega una fase sobre el qubit ν_e; el circuito de Trotter conserva el peso, el filtro gana 2,8× en mediana, y un solo paso alcanza.
- La materia imita la violación CP (84 m-qg con $\delta_{CP} = 0$) y revela el ordenamiento de masas: el signo del corrimiento se invierte entre normal e invertido.
- En el Sol, P_{ee} es lineal en qg_Z del qubit ν_2 y cae 1173 m-qg; como las fases se pierden, el Sol entero es una sola rotación, y la respuesta es clásica.
- En las oscilaciones colectivas se conserva el número de ν_2, no el de sabor: el filtro funciona en la base de masa (2,2–2,8×, análisis posterior) y no en la de sabor; las siete predicciones registradas fallaron por error de Trotter.
- Queda pendiente la comparación con un perfil de densidad solar realista.

Notas bibliográficas

El efecto de materia es Wolfenstein (1978) y Mikheyev y Smirnov (1985); los parámetros, Esteban et al. (2020) y Navas et al. (2024). Para las oscilaciones colectivas de neutrinos, véase la revisión Duan et al. (2010). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

11 Fases de Majorana, doble beta sin neutrinos y neutrinos estériles

Los capítulos 9 y 10 leyeron lo que un circuito de oscilación ve: ángulos de mezcla, la fase CP, el ordenamiento de masas a través de la materia. Este capítulo trata dos preguntas abiertas de la física de neutrinos que tienen una respuesta clara en términos qg, una negativa y otra positiva. Las fases de Majorana no cambian ninguna probabilidad de oscilación, y por lo tanto ninguna lectura qang: el compilador las borra. Un neutrino estéril, en cambio, es un qubit más en el sector de peso 1, y el filtro lo trata como a cualquier otro sabor. Al final, como cierre de la Parte III, los cuatro números cuánticos del átomo escritos con la misma regla.

11.1. Desde la base: lo que no cambia una probabilidad no cambia una lectura

Todas las lecturas del capítulo 1 son funciones de probabilidades: $qg_Z = 2p_0 - 1$, $m = 1000\, qg_Z$, el ángulo arc cos qg_Z y la entropía qg_S. Por eso un parámetro físico que no cambia ninguna probabilidad de medición es invisible para todas ellas a la vez, sin excepción y con cualquier número de disparos. La pregunta "¿lo ve un circuito?" se reduce a "¿cambia alguna probabilidad?", y se responde antes de correr nada.

Al revés, un parámetro que sí cambia una probabilidad en δP aparece como $2000\, \delta P$ m-qg en el qubit del sabor correspondiente, como en los capítulos 9 y 10. El neutrino estéril de este capítulo es de ese tipo: con los parámetros hipotéticos que se usan abajo, baja la supervivencia de ν_μ en 0,085, es decir, 171 m-qg.

11.2. Las fases de Majorana son invisibles para las oscilaciones

Si el neutrino es su propia antipartícula (una partícula de Majorana), la matriz de mezcla tiene dos fases más,

$$U_M = U\ \mathrm{diag}\big(1,\ e^{i\alpha_{21}/2},\ e^{i\alpha_{31}/2}\big)\,.$$

La matriz agregada es diagonal en la base de masa, y la propagación también lo es. Las dos conmutan, y en el operador de evolución $U_M\,D\,U_M^\dagger$ la fase se cancela con su inversa: $U_M D U_M^\dagger = U D U^\dagger$. Ninguna probabilidad de oscilación depende de α_{21} ni de α_{31}, ni en el vacío ni en la materia (en la materia el hamiltoniano es $U_M\,\mathrm{diag}(0, \Delta m^2_{21}, \Delta m^2_{31})\,U_M^\dagger + V$, y la cancelación ya ocurre en el primer término, antes de sumar el potencial). Numéricamente la diferencia máxima entre las nueve probabilidades con y sin fases es 4×10^{-16}, el redondeo de la máquina (§163).

En el circuito de tres sabores del capítulo 9 las fases son compuertas de fase en la base de masa, insertadas a cada lado de la propagación (`majorana_circuit`). Lo instructivo es lo que hace el transpilador: en los tres dispositivos simulados, **el circuito compilado con fases** $(\alpha_{21}, \alpha_{31}) = (\pi/2,\, 3\pi/4)$ **es idéntico al compilado sin ellas** (en FakeFez, 18 CZ, 48 R_Z y 47 $\sqrt{X}$ en los dos). El optimizador junta cada compuerta de fase con su inversa y las elimina. No es una "eliminación analítica" pensada por nadie, sino la consecuencia directa de que el operador no cambia: un compilador que simplifica fases consecutivas encuentra la identidad sola.

11.3. Las fases de Majorana en la doble beta sin neutrinos

Donde las fases sí se ven es en un proceso que viola el número leptónico: la desintegración doble beta sin neutrinos, $(A, Z) \to (A, Z+2) + 2e^-$, posible sólo si el neutrino es de Majorana. Su tasa es proporcional al cuadrado de la masa efectiva

$$m_{\beta\beta} = \left| \sum_i U_{ei}^2\, m_i \right|,$$

y como entra U_{ei}^2 y no $|U_{ei}|^2$, las fases no se cancelan: pueden sumar las tres contribuciones o hacerlas interferir destructivamente. Con el neutrino más liviano sin masa, recorrer las dos fases da (§163)

Tabla 11.1: Masa efectiva de la doble beta sin neutrinos con el neutrino más liviano sin masa, recorriendo las fases de Majorana.

ordenamiento	masas (meV)	$m_{\beta\beta}$ (meV)
normal	0; 8,6; 50,1	1,4 a 3,7
invertido	49,2; 49,9; 0	18,7 a 48,3

La Figura 11.1 muestra las dos bandas en función de la masa más liviana. En ordenamiento invertido la banda tiene un piso de unos 19 meV, que es el objetivo de la próxima generación de experimentos. En ordenamiento normal, entre unos 2 y 7 meV de masa más liviana, las fases pueden anular $m_{\beta\beta}$ por completo: una cancelación que ningún experimento de doble beta podría distinguir de un neutrino de Dirac.

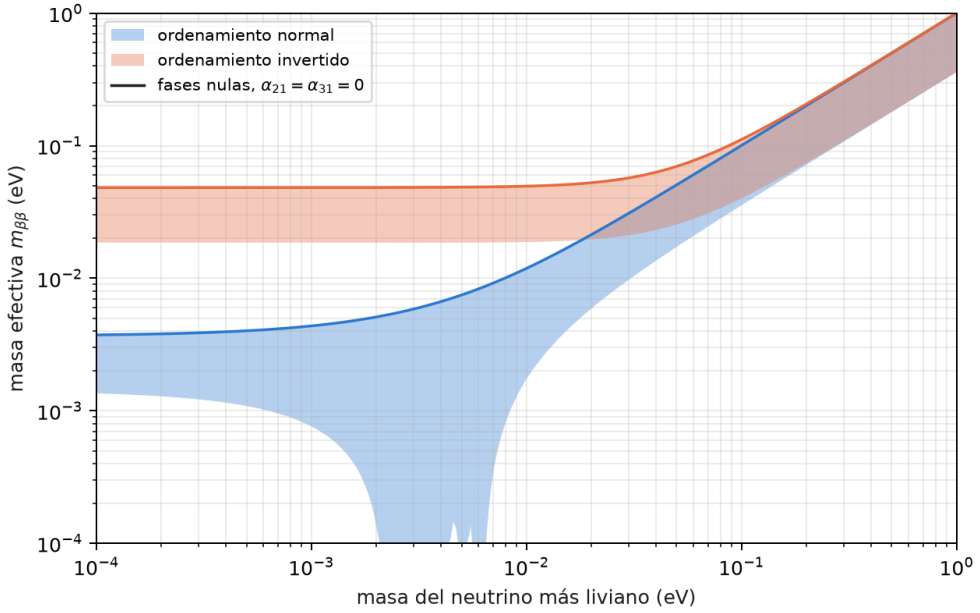


Figura 11.1: La masa efectiva $m_{\beta\beta}$ en función de la masa del neutrino más liviano, recorriendo las dos fases de Majorana (bandas), y con fases nulas (líneas). En ordenamiento normal las fases pueden anularla entre unos 2 y 7 meV.

La lectura qg de esta sección es sólo la de la sección anterior, dicha al revés: un circuito de oscilación no puede medir lo que esta figura grafica. Lo que sí hace la escala es separar con claridad las dos preguntas, la de oscilación (probabilidades,

lecturas qang) y la de masa (una amplitud con fases, fuera de cualquier lectura de un qubit de sabor).

11.4. El neutrino estéril: un cuarto qubit en el sector de peso 1

Un neutrino estéril ν_s es un cuarto sabor que no interactúa por la fuerza débil, pero que se mezcla con los otros tres. En el modelo 3+1 hay un cuarto estado de masa con $\Delta m^2_{41} \sim 1$ eV², mucho mayor que los otros dos, y la mezcla real es una secuencia de seis rotaciones,

$$U = R_{34}\, R_{24}\, R_{14}\, R_{23}\, R_{13}\, R_{12}$$

(sin fases CP, para mantenerlo simple). En el circuito, cada sabor es un qubit con un solo 1: el estéril es simplemente **un qubit más en el sector de peso 1** (`sterile_circuit`). Cada rotación es una RBS y la propagación, una compuerta de fase por qubit; todo conserva el peso y el filtro se aplica sin cambios.

A distancias cortas, donde las oscilaciones de los tres sabores todavía no empezaron, la supervivencia es efectivamente de dos niveles,

$$P(\nu_\mu \to \nu_\mu) \approx 1 - 4|U_{\mu 4}|^2 \left(1 - |U_{\mu 4}|^2\right) \sin^2 \frac{\Delta_{41}}{2}.$$

Con los valores hipotéticos $\theta_{14} = \theta_{24} = 0{,}15$ y $\Delta m^2_{41} = 1$ eV², $|U_{\mu 4}|^2 = 0{,}022$ y la amplitud es 0,085; a $L = 0{,}5$ km el primer mínimo cae en 0,40 GeV (Figura 11.2). Es el mismo caso del capítulo 9, con la misma geometría: un cono de precesión con ángulo de mezcla efectivo, ahora entre ν_μ y ν_s.

En los modelos de ruido simulados, las tres predicciones registradas para el estéril se cumplieron:

Tabla 11.2: El estéril 3+1 en modelos de ruido simulados, 4 qubits, 8000 disparos.

prueba	resultado
S1 error filtrado menor que el crudo en las 18 combinaciones (energía, dispositivo)	sí
S2 mediana de la razón crudo / filtrado ≥ 2	5,5

prueba	resultado
S3 mínimo filtrado de $P(\nu_\mu \to \nu_\mu)$ en 0,4 GeV en los tres dispositivos	sí

En el mínimo (exacta 0,915), FakeBrisbane lee 0,678 crudo y 0,879 filtrado; FakeTorino, 0,749 y 0,890; FakeFez, 0,792 y 0,890. **La ganancia es mayor que con tres sabores** (5,5× contra 3,0–3,8×) porque el circuito tiene cuatro qubits: hay más formas de que un disparo salga del sector de peso 1, y el filtro las descarta todas.

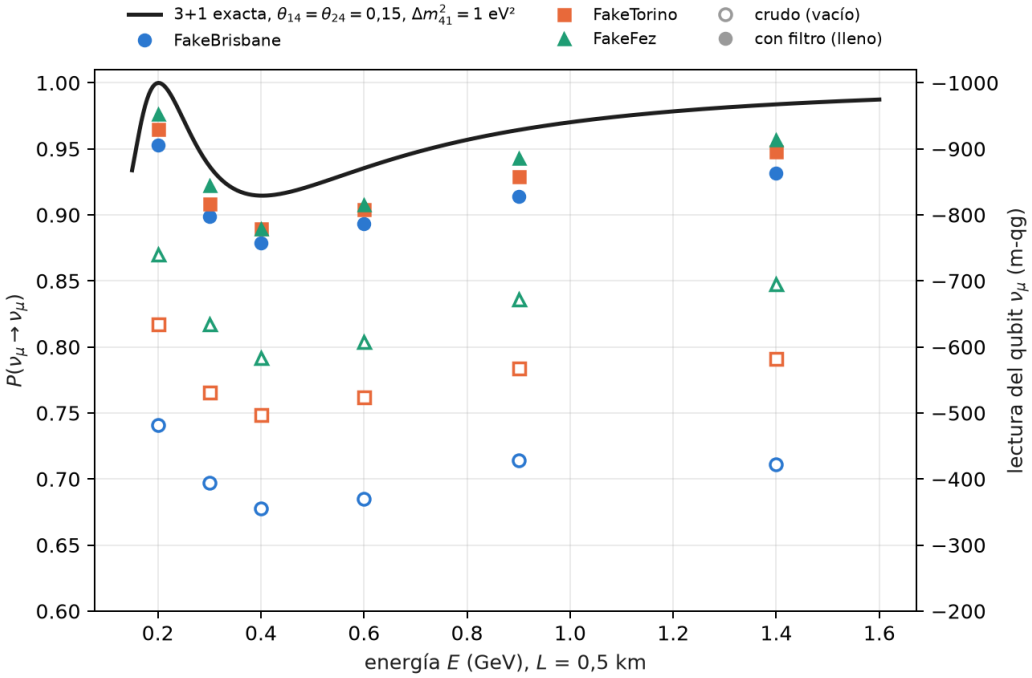


Figura 11.2: Supervivencia de ν_μ a 0,5 km con un estéril hipotético. La curva es exacta; los marcadores vacíos, las lecturas crudas; los llenos, las filtradas, en tres modelos de ruido simulados. A la derecha, la lectura del qubit ν_μ en m-qg.

Lo que queda está, otra vez, dentro del sector: los valores filtrados siguen 0,025 a 0,036 por debajo del exacto en el mínimo, porque el ruido que mueve un 1 de un qubit a otro conserva el peso y el filtro no lo ve.

Pendiente: los datos. Los ángulos de mezcla de esta sección son hipotéticos, elegidos para que la señal se vea; no son un ajuste. Los límites fenomenológicos

y la comparación de modelos 3+1 con los experimentos de línea de base corta no están hechos: quedan como propuesta.

11.5. Los cuatro números cuánticos en términos qg

El capítulo 10 terminó con una pregunta sobre qué número se conserva. La misma pregunta, aplicada al átomo, da una lectura qg de los cuatro números cuánticos (§155). Es una traducción, no física nueva.

- **El número magnético.** Un registro de n qubits en su subespacio simétrico es un espín $j = n/2$, y en cada disparo el número magnético se lee del **peso de Hamming**: $m = n/2 - w$. El filtro de peso es la proyección sobre un valor de m, y $qg_Z = \langle J_z \rangle / j$ para cualquier momento angular.
- m_s es un qubit, con $qg_Z = 2m_s$. m_l de un orbital l es el peso de un registro simétrico de $2l$ qubits: los tres orbitales p complejos son $|00\rangle$, $(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ y $|11\rangle$. Los reales p_x y p_y mezclan $m_l = \pm 1$, y por eso tienen $qg_Z = 0$ como p_z, pero con entropía 0,63 en lugar de cero.
- l es la simetría de permutación, y se lee con valores qg de SWAP: para dos qubits, $\langle J^2 \rangle = 1 + qg_{\text{SWAP}}$.
- n: por la simetría oculta SO(4) del hidrógeno, la capa n son dos espines $(n-1)/2$, es decir, dos registros simétricos de $n-1$ qubits; m_l es $(n-1)$ menos el peso total de los $2(n-1)$ qubits, y el filtro de peso lo fija.

El ángulo qang de un autoestado $|l, m\rangle$ es $\arccos(m/l)$. El ángulo del modelo vectorial de los libros de texto es $\arccos\left(m/\sqrt{l(l+1)}\right)$, y siempre queda más cerca del ecuador (Figura 11.3), porque $|l, m\rangle$ tiene una dispersión transversal $\langle J_x^2 + J_y^2 \rangle = l(l+1) - m^2 > 0$:

Tabla 11.3: El ángulo qang de $|l, m\rangle$ frente al ángulo del modelo vectorial.

l, m	ángulo qang	modelo vectorial	$\langle J_x^2 + J_y^2 \rangle$
1, +1	0°	45,0°	1
2, +2	0°	35,3°	2
2, +1	60,0°	65,9°	5
3, +3	0°	30,0°	3
3, +1	70,5°	73,2°	11

qg_Z mide hacia dónde apunta $\langle \mathbf{J} \rangle$; el modelo vectorial dibuja un vector de largo $\sqrt{l(l+1)}$. Los dos coinciden sólo en $m = 0$. En una demostración (no registrada)

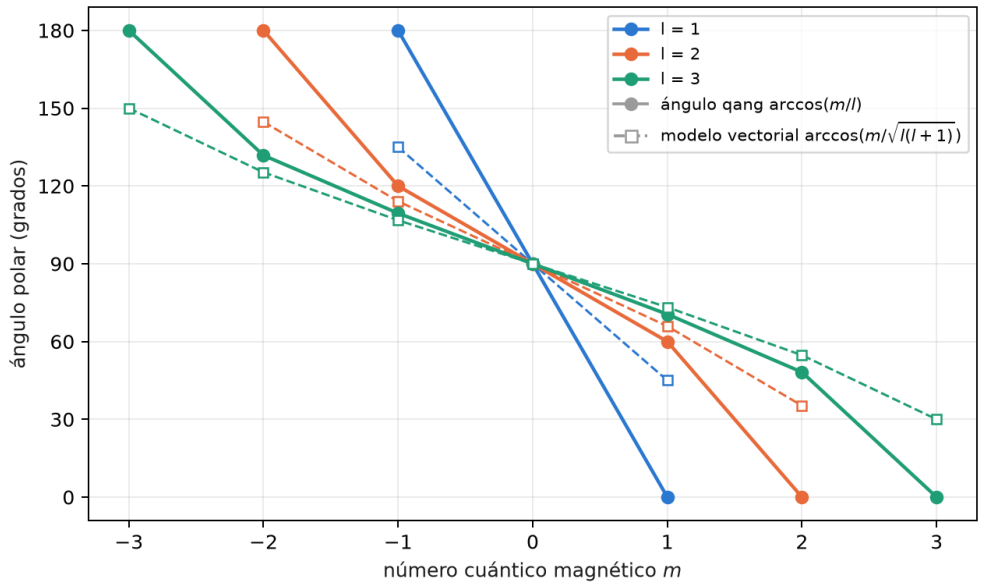


Figura 11.3: Ángulo polar de los autoestados $|l, m\rangle$: el ángulo qang $\arccos(m/l)$ (círculos) y el del modelo vectorial (cuadrados). Coinciden sólo en $m = 0$; el qang es la dirección de $\langle \mathbf{J} \rangle$, el vectorial dibuja un vector de largo $\sqrt{l(l+1)}$.

con el modelo de ruido de FakeTorino, p_z ($m_l = 0$) se filtra a $m_l = \pm 1$ en el 19 % de los disparos con la disposición de qubits por defecto y en el 2,2 % con la cadena que elige `ibm.best_chain`; en los dos casos el filtro de peso devuelve $P(m_l = 0) = 1$.

11.6. Sin qang y con qang

Tabla 11.4: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
decidir si un parámetro es observable	buscar si alguna probabilidad depende de él	"lo que no cambia una probabilidad no cambia ninguna lectura"	**equivalente**; la regla qang lo dice para todas las lecturas a la vez
calcular $m_{\beta\beta}$	$\lvert\sum U_{ei}^2 m_i\rvert$	—	**qang no se aplica**: es una amplitud con fases, no una probabilidad
cuantificar la señal del estéril	$\delta P = 0{,}085$	171 m-qg	**unidad**
reducir el error con cuatro sabores	lectura cruda	filtro de peso: 5,5×	del **filtro**
comparar ángulo qang y modelo vectorial	$\arccos(m/\sqrt{l(l+1)})$	$\arccos(m/l)$	**a favor** de qang como lectura: es la dirección de $\langle \mathbf{J} \rangle$, lo que mide un qg_Z; el modelo vectorial dibuja otra cosa

Balance. El capítulo tiene un caso donde qang no tiene nada que decir ($m_{\beta\beta}$), y conviene que esté escrito. Su aporte propio es de interpretación: qué ve una lectura y qué no, y qué ángulo mide realmente un qg_Z.

11.7. En código

```
import math
from qang import neutrino as nu
from qang import angular

# Majorana: ninguna probabilidad cambia, en vacío o en materia
nu.majorana_invisible(1300, 2.6, -math.pi / 2, math.pi / 2, 3 * math.pi / 4, rho=2.85)  #
nu.m_bb(0.0, a21=0.0, a31=0.0, ordering="IO")                                            # 0.048 eV

# el estéril: un cuarto qubit en el sector de peso 1
P = nu.sterile_probabilities(L=0.5, E=0.4, dm41=1.0, theta14=0.15, theta24=0.15)      #
qc = nu.sterile_circuit("mu", L=0.5, E=0.4, dm41=1.0, theta14=0.15, theta24=0.15)

# los números cuánticos: el ángulo qang y el del modelo vectorial
math.degrees(angular.qang_angle_of_eigenstate(2, 1)), math.degrees(angular.vector_mode
```

11.8. Resumen

- Toda lectura qang es función de probabilidades: un parámetro que no cambia ninguna probabilidad es invisible para todas a la vez.
- Las fases de Majorana se cancelan en $U_M D U_M^\dagger$ (diferencia 4×10^{-16}); el transpilador entrega el mismo circuito con y sin ellas.
- La doble beta sin neutrinos sí las ve: $m_{\beta\beta}$ va de 1,4 a 3,7 meV (normal) y de 18,7 a 48,3 meV (invertido) con el neutrino más liviano sin masa, y puede anularse en ordenamiento normal.
- Un neutrino estéril es un cuarto qubit en el sector de peso 1; con mezcla hipotética, el filtro gana 5,5× y ubica el mínimo en 0,4 GeV. Los límites con datos reales quedan pendientes.
- Los cuatro números cuánticos se leen en qg: m del peso de Hamming, l de SWAP, n del tamaño del registro; el ángulo qang $\arccos(m/l)$ no es el del modelo vectorial.

Notas bibliográficas

El neutrino de Majorana es Majorana (1937); las fases de Majorana y su invisibilidad en las oscilaciones, Schechter y Valle (1980) y Bilenky et al. (1980). Para la

doble beta sin neutrinos, véase Dolinski et al. (2019); la señal que motivó el neutrino estéril es Aguilar et al. (2001). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte IV

IV. Teleportación cuántica en redes ópticas y distribución de entrelazamiento (`qang.qpon`)

12 Teleportación óptica y el límite del par de Bell

La Parte IV lleva la escala qang a las redes de comunicación cuántica. Este capítulo trata la teleportación de un qubit a través de una red óptica pasiva: una oficina central comparte un estado entrelazado con un usuario a través de una fibra y un divisor pasivo $1{:}N$, y el fotón llega con probabilidad baja. La pregunta es qué estado conviene compartir. La respuesta habitual, un par de Bell, deja de ser la óptima en cuanto el canal pierde fotones, y el estado óptimo queda fijado por un solo número: la lectura qg_Z de uno de sus qubits. El capítulo cierra con la lectura qg de los pares de Bell en una red, que es lo que el capítulo 13 usa como predictor de la fidelidad.

12.1. Desde la base: la fidelidad es una probabilidad

La fidelidad de teleportar un estado de entrada es la probabilidad de que Bob, después de deshacer la preparación, mida 0: es un p_0 del capítulo 1, con su lectura $m = 1000(2p_0 - 1)$ m-qg y su barra de error. La fidelidad media sobre la esfera de Bloch se obtiene exactamente con seis entradas, los estados cardinales $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|{\pm}\rangle$, $|\pm i\rangle$, porque forman un diseño esférico de orden 3.

El estado que se comparte es $\cos\alpha|00\rangle + \sin\alpha|11\rangle$, y cada uno de sus qubits tiene

$$qg_Z = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha, \qquad \alpha = \frac{\arccos qg_Z}{2}.$$

El ángulo del recurso es la mitad del ángulo qang de cualquiera de sus qubits. El par de Bell, $\alpha = \pi/4$, es el ecuador: $qg_Z = 0$, $m = 0$. Un recurso menos entrelazado se inclina hacia $|00\rangle$ ($m > 0$); uno "más que maximalmente entrelazado", en el sentido de esta sección, se inclina hacia $|11\rangle$ ($m < 0$). Toda la regla de diseño de este capítulo es una lectura en m-qg de un solo qubit. En la escala angular qga del capítulo 1 (Sección 1.4), el par de Bell tiene $\alpha = 125$ qga y su qubit está en el ecuador, a 250 qga.

12.2. Teleportación con un par de Bell

En el protocolo de Bennett et al. (1993), Alicia mide su qubit de entrada y su mitad del recurso en la base de Bell, le comunica a Bob dos bits clásicos, y Bob aplica una de cuatro correcciones de Pauli. Con un par de Bell perfecto la fidelidad es 1. Con un recurso imperfecto, la fidelidad media depende sólo de su fracción de singlete $f = \langle \Phi^+ | \rho | \Phi^+ \rangle$:

$$F = \frac{2f + 1}{3},$$

y la teleportación supera a cualquier estrategia clásica (medir y reenviar) sólo si $F > 2/3$, es decir, $f > 1/2$. En el circuito, la medición de Bell va en forma diferida (CX, H, CX, CZ), sin mediciones intermedias.

12.3. Un canal que pierde fotones

En una red óptica pasiva de bajada (§157) el segundo qubit del recurso es un fotón presente o ausente (carril simple) que viaja por una fibra de transmisión $T = 10^{-0{,}02L}$ (L en km, 0,2 dB/km) y llega a un divisor $1{:}N$. Para el modo de Bob las dos cosas son divisores de haz, es decir, compuertas RBS que conservan el número de fotones, y el fotón llega con probabilidad

$$\eta = \frac{T}{N}.$$

Un fotón perdido deja a Bob en $|0\rangle$: el canal es un amortiguamiento de amplitud, que no trata igual a las dos ramas del recurso. La rama $|00\rangle$ no tiene nada que perder; la rama $|11\rangle$ pierde su fotón con probabilidad $1 - \eta$. Por eso conviene poner menos peso en la rama frágil, y el óptimo deja de estar en $\alpha = \pi/4$.

12.4. La regla de diseño

La fracción de singlete del recurso después del canal es

$$f = \frac{(\cos\alpha + \sqrt{\eta}\,\sin\alpha)^2}{2\,(\cos^2\alpha + \kappa \sin^2\alpha)},$$

con $\kappa = 1$ en el protocolo sin asistencia, en el que sólo actúan Alicia y Bob. En el protocolo **asistido**, los otros $N-1$ usuarios informan si el fotón llegó a ellos, y esos disparos se descartan: es un **filtro de sector** sobre el registro de los otros usuarios, y la única pérdida que queda sin anunciar es la de la fibra, con $\kappa = \eta + 1 - T$. Maximizar f da

$$\tan\alpha^{*} = \frac{\sqrt{\eta}}{\kappa}, \qquad F^{*} = \frac{2+\eta/\kappa}{3}, \qquad qg_{Z}^{*} = \cos 2\alpha^{*} = \frac{\kappa^{2}-\eta}{\kappa^{2}+\eta}.$$

El índice maestro original escribía la regla como $\sqrt{\eta/\kappa}$; la forma correcta es $\sqrt{\eta}/\kappa$, que es la que verifica el código. La regla entera es la tercera fórmula: **un qubit del recurso medido en Z fija α**. En los cuatro enlaces del experimento:

Tabla 12.1: La regla de diseño en los cuatro enlaces; en negrita, los casos en que el par de Bell no supera el límite clásico.

enlace	protocolo	η	α^{*} (rad)	F^{*}	m^{*} (m-qg)	par de Bell	conservado en α^{*}
0 km, 1:4	sin asistencia	0,250	0,464	0,750	+600	0,708	1
0 km, 1:4	asistido	0,250	1,107	1,000	−600	0,933	0,40
0 km, 1:8	sin asistencia	0,125	0,340	0,708	+778	**0,639**	1
0 km, 1:8	asistido	0,125	1,231	1,000	−778	0,876	0,22
20 km, 1:4	sin asistencia	0,100	0,306	0,700	+819	**0,622**	1
20 km, 1:4	asistido	0,100	0,423	0,714	+663	0,672	0,95
20 km, 1:8	sin asistencia	0,050	0,219	0,683	+905	**0,583**	1
20 km, 1:8	asistido	0,050	0,330	0,692	+790	0,635	0,96

Tres lecturas de la tabla. **Sin asistencia, el par de Bell puede no servir**: en un divisor 1:8, o a 20 km, queda por debajo de 2/3, y sólo el recurso óptimo, inclinado hacia $|00\rangle$, supera el límite clásico. **Con asistencia y sin fibra, el óptimo tiene** $F^{*} = 1$ en $\tan\alpha^{*} = \sqrt{N} > 1$: el recurso está más inclinado hacia $|11\rangle$ que un par de Bell, y el filtrado del divisor lo devuelve exactamente a un par de Bell; el

precio es la fracción conservada. En ese caso $\kappa = \eta$ y $qg_Z^* = -(1-\eta)/(1+\eta)$, exactamente la lectura opuesta del caso sin asistencia: -600 contra $+600$ m-qg con $N = 4$. **Con fibra**, la pérdida sin anunciar vuelve a dominar y el óptimo asistido regresa al lado de $|00\rangle$ (Figura 12.1).

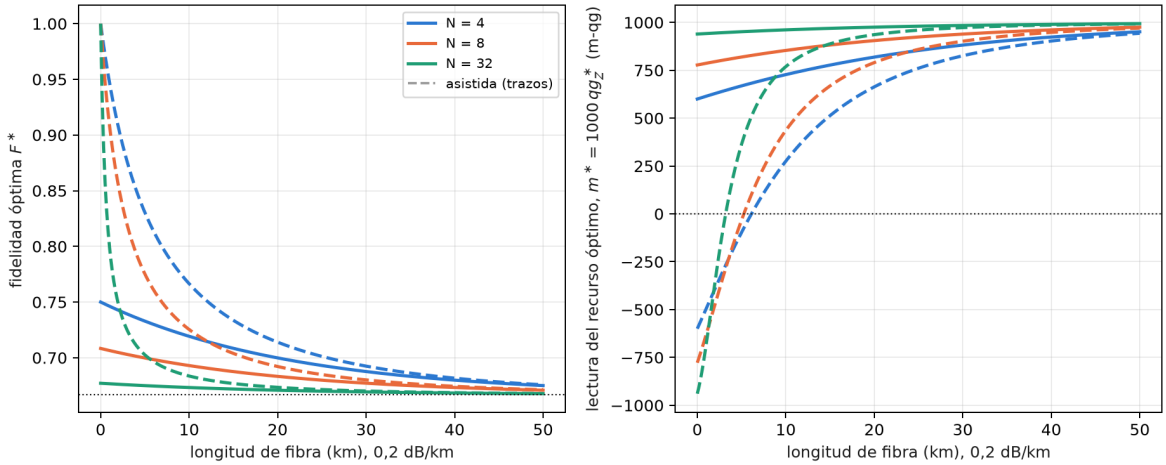


Figura 12.1: Izquierda: fidelidad óptima en función de la longitud de fibra para tres divisores; los trazos son el protocolo asistido. Derecha: la lectura del recurso óptimo en m-qg. Sin fibra, el óptimo asistido está del lado de $|11\rangle$ ($m^* < 0$); unos kilómetros de fibra lo devuelven al lado de $|00\rangle$.

Es la versión de variables discretas de un resultado de variables continuas: en una red óptica pasiva, la teleportación sin asistencia tiene una compresión (squeezing) óptima finita, y la asistida, una que tiende a infinito a distancia corta (Yaghoobianzadeh y Salehi 2026). El recurso no maximalmente entrelazado es el análogo de la compresión finita.

12.5. La regla en dispositivos simulados

El circuito tiene cinco qubits (entrada, Alicia, Bob, el entorno de la fibra y los otros usuarios), con la fibra y el divisor como compuertas RBS. Se corrió con 14 ángulos del recurso más $\pi/4$, seis entradas y 4000 disparos, en tres **modelos de ruido simulados** (§157). Cinco de las seis predicciones registradas se cumplieron:

Tabla 12.2: La regla de diseño en tres modelos de ruido simulados.

prueba	resultado
Q1 mejor ángulo sin asistencia a menos de 0,1 rad de α^*	12 de 12
Q2 0 km, 1:8: par de Bell por debajo de 2/3, mejor ángulo por encima	0,624–0,627 y 0,690–0,701 en los tres
Q3 la asistida supera a la no asistida	12 de 12
Q4 óptimo asistido por encima de $\pi/4$ a 0 km	1,0–1,2 rad en los tres
Q5 $\lvert F_{\text{mejor}} - F^* \rvert < 0{,}05$	**falló**: 19 de 24; los 5 fallos son asistidos a 0 km ($F^* = 1$, medido 0,897–0,957)
Q6 fracción conservada a menos de 0,03 de $\cos^2\alpha + \kappa \sin^2\alpha$	12 de 12 (mayor diferencia 0,028)

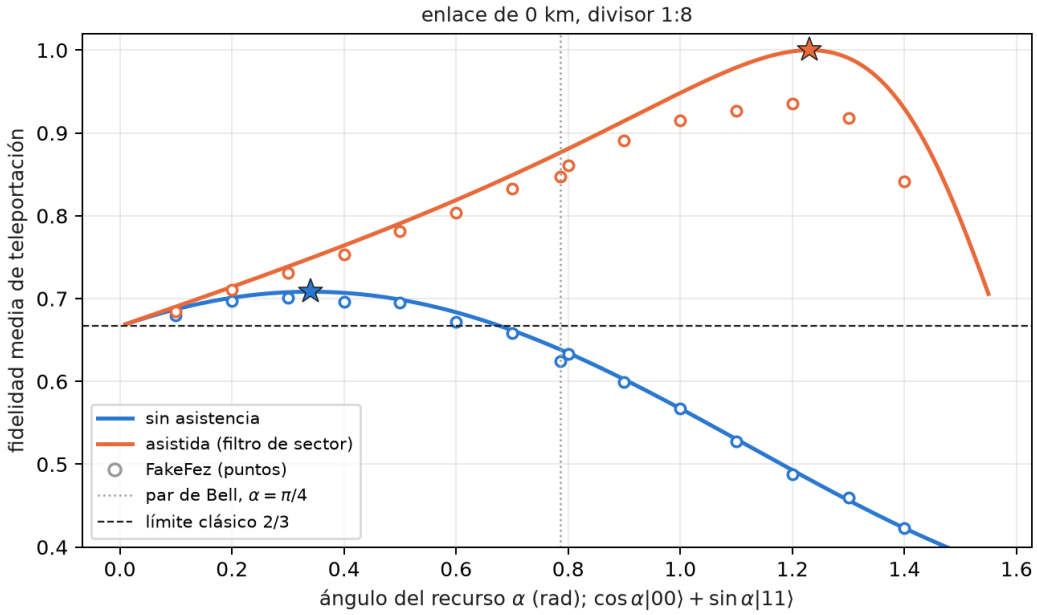


Figura 12.2: Fidelidad media en función del ángulo del recurso, enlace de 0 km con divisor 1:8. Curvas exactas, círculos del modelo de ruido de FakeFez, estrellas en el óptimo. El par de Bell (línea punteada) queda por debajo del límite clásico sin asistencia; el recurso óptimo, por encima.

La regla de diseño sobrevive al ruido de los dispositivos (Figura 12.2): en un

divisor 1:8 sólo el recurso óptimo supera el 2/3 clásico. Y la escala qang, aquí, **no agrega nada contra el ruido**: el circuito de teleportación (H, CX) no conserva el peso, de modo que el único filtro es el anuncio de los otros usuarios. Por eso los fallos de Q5 están donde F^* está cerca de 1: el ruido de las compuertas pesa más cuanto más alta es la fidelidad que se busca. El capítulo 13 pregunta qué cambia cuando todas las compuertas conservan el número de fotones.

Los límites están declarados: sólo bajada, carril simple, ruido de dispositivos simulado, y ninguna ineficiencia de detector ni cuenta oscura más allá de los errores de lectura de los modelos.

12.6. Pares de Bell en una red, leídos en qg

Antes de teleportar conviene saber qué tan bueno es el par compartido. Un par que debería ser $|\Phi^+\rangle$ queda descrito por cinco lecturas qg: tres correladores de dos qubits, qg_{XX}, qg_{YY}, qg_{ZZ}, y los sesgos polares de cada lado, $m_A = \langle Z_A \rangle$ y $m_B = \langle Z_B \rangle$. Bastan tres configuraciones de medición (§57). La fidelidad con $|\Phi^+\rangle$ es exacta para cualquier estado,

$$F_{\Phi^+} = \frac{1 + qg_{XX} - qg_{YY} + qg_{ZZ}}{4},$$

y con ella la fidelidad de teleportación que el par va a dar, $F = (2F_{\Phi^+} + 1)/3 = (3 + qg_{XX} - qg_{YY} + qg_{ZZ})/6$, sin correr la teleportación (el capítulo 13 la pone a prueba). Los pesos de los cuatro estados de Bell dicen qué error domina: Φ^- es una inversión de fase, Ψ^+ una inversión de bit, Ψ^- las dos. Con ruido $p = 0{,}1$ sobre cada mitad:

Tabla 12.3: Firmas qg del ruido sobre un par de Bell, $p = 0{,}1$ en cada mitad.

ruido	qg_{XX}	qg_{YY}	qg_{ZZ}	$m_A = m_B$	F_{Φ^+}	error dominante
desfase	+0,64	−0,64	**+1,00**	0	0,820	Φ^-
inversión X	**+1,00**	−0,64	+0,64	0	0,820	Ψ^+
inversión Y	+0,64	**−1,00**	+0,64	0	0,820	Ψ^-
despolarizante	+0,81	−0,81	+0,81	0	0,858	todos iguales
amortiguamiento	+0,90	−0,90	+0,82	**+0,10**	0,905	Ψ^+

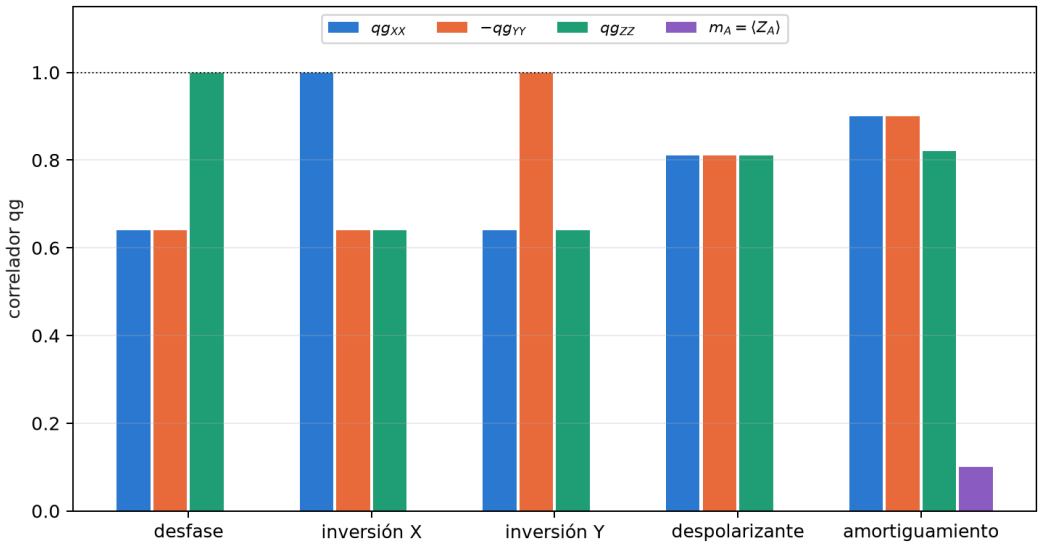


Figura 12.3: Las firmas de la tabla: cada ruido de Pauli deja un correlador en su valor ideal (la línea punteada), y sólo el amortiguamiento de amplitud mueve los sesgos polares locales.

Cada ruido de Pauli deja un correlador intacto, y sólo el amortiguamiento (la relajación T1 de una memoria) mueve los sesgos locales (Figura 12.3). Esa lectura decide cómo **destilar**. El protocolo DEJMPS combina el peso de Φ^+ con el error que ocupa una posición fija, y unas rotaciones locales eligen qué error va allí. El orden de los libros de texto puede empeorar las cosas: con ruido de inversión Y, una ronda baja la fidelidad de 0,820 a 0,705, y con amortiguamiento casi no gana (0,828). La regla “el error estimado más chico en esa posición”, leída de los tres correladores con 200 disparos por configuración, alcanza la mejor salida en los tres casos: 0,954, 0,954 y 0,915 (contra un óptimo de 0,920).

12.7. Sin qang y con qang

Tabla 12.4: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
elegir el recurso óptimo	optimizar el coeficiente de Schmidt α	una lectura: $qg_Z^* = (\kappa^2-\eta)/(\kappa^2+\eta)$ en un qubit; el signo de m^* dice de qué lado del par de Bell está	**a favor** en diseño y verificación: se calibra midiendo un qubit en Z
decidir si el par de Bell sirve	calcular $F(\pi/4)$	el par de Bell es $m=0$; el óptimo, m^*	**equivalente** en el valor; qang lo ubica en la escala
reducir el ruido de los dispositivos	—	el filtro no se aplica: la teleportación no conserva el peso	**ninguna**
diagnosticar un par de Bell	tomografía completa	tres correladores qg y dos sesgos; la firma elige la destilación (0,705 → 0,954 con inversión Y)	**a favor**: tres configuraciones en lugar de nueve, y una regla de decisión directa

Balance. Es el capítulo donde la lectura qang más se parece a una herramienta de ingeniería: un número fija el recurso y tres correladores diagnostican el par. Contra el ruido no aporta, y está dicho.

12.8. En código

```
import math
from qang import qpon

eta, kappa = qpon.link(length_km=0, n_users=8, assisted=False)  # (0.125, 1.0)
qpon.optimal_angle(eta, kappa)                                    # 0.340 rad
qpon.optimal_fidelity(eta, kappa)                                    # 0.708
qpon.average_fidelity(math.pi / 4, eta, kappa)             # 0.639: el par de Bell, por d
qpon.optimal_qg_z(eta, kappa)                            # 0.778 -> +778 m-qg
```

```
qpon.resource_angle_from_qg_z(0.778)                    # 0.340: el recurso, desde una l

qc = qpon.teleport_circuit(alpha=0.340, transmission=1.0, n_users=8, input_index=2)  #
qpon.fidelity_from_correlators(xx=0.81, yy=-0.81, zz=0.81)     # 0.905 = (2 F_Phi+ + 1)/
```

12.9. Resumen

- La fidelidad de teleportación es una probabilidad; el recurso $\cos\alpha|00\rangle + \sin\alpha|11\rangle$ tiene $qg_Z = \cos 2\alpha$ en cada qubit, y el par de Bell es $m = 0$.
- En un canal que pierde fotones ($\eta = T/N$) el óptimo no es el par de Bell: $\tan\alpha^* = \sqrt{\eta}/\kappa$, $F^* = (2+\eta/\kappa)/3$, $qg_Z^* = (\kappa^2-\eta)/(\kappa^2+\eta)$.
- Sin asistencia, en un divisor 1:8 o a 20 km el par de Bell queda por debajo de 2/3 y el recurso óptimo, por encima; con asistencia y sin fibra, $F^* = 1$ con un recurso del lado de $|11\rangle$.
- La regla sobrevive al ruido simulado (cinco de seis predicciones); el filtro qg no ayuda aquí porque la teleportación no conserva el peso.
- Un par de Bell se lee con tres correladores y dos sesgos; cada ruido de Pauli deja uno intacto, y esa firma elige la ronda de destilación correcta.

Notas bibliográficas

El protocolo de teleportación es Bennett et al. (1993), y los pares de Bell, los de Bell (1964). El resultado de variables continuas en redes ópticas pasivas es Yaghoobianzadeh y Salehi (2026). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

13 Doble carril, filtro de sector y fidelidad a larga distancia

El capítulo 12 terminó con una limitación: el filtro qg no ayudaba contra el ruido de los dispositivos, porque el circuito de teleportación no conserva el peso. Este capítulo hace las dos preguntas que siguen. La primera es si la fidelidad que va a dar un recurso se puede leer antes de teleportar, con pocas mediciones; la respuesta es sí, con tres correladores qg. La segunda es qué pasa si todas las compuertas conservan el número de fotones; la respuesta es el doble carril, en el que el filtro anuncia cada pérdida, y que a 20 km supera al óptimo sin ruido de carril simple hasta que los falsos anuncios ponen un piso. El capítulo cierra la Parte IV con el intercambio de entrelazamiento en cadena, leído con los mismos correladores.

13.1. Desde la base: tres lecturas qg predicen una fidelidad

Cada correlador de dos qubits es una lectura qg como las del capítulo 1: la paridad de dos bits medidos en una base, $qg_{PP} = 1 - 2P(\text{paridad impar})$, con su lectura en m-qg y su barra de error $\sqrt{(1-qg^2)/N}$. El capítulo 12 mostró que la fidelidad con $|\Phi^+\rangle$ es lineal en tres de ellos; la fidelidad media de teleportación también (§158):

$$F = \frac{3 + qg_{XX} - qg_{YY} + qg_{ZZ}}{6}.$$

Es una **lectura lineal del recurso solo**, sin la medición de Bell: tres circuitos con 4–5 compuertas de dos qubits, contra 10–11 de la teleportación. Al ser lineal, su barra de error es la combinación de las tres: con N disparos por correlador, $\sigma_F = \sqrt{\sum(1-qg^2)/N}/6$, unos 0,0025 con $N = 10\,000$ cerca de $F \approx 0{,}7$.

13.2. La fidelidad desde tres correladores

En los cuatro enlaces del capítulo 12, con los dos protocolos y en tres **modelos de ruido simulados**, se comparó la fidelidad predicha por los correladores con la teleportada. En las 24 combinaciones la diferencia es como máximo 0,029 (Figura 13.1): **tres circuitos cortos predicen la fidelidad teleportada**.

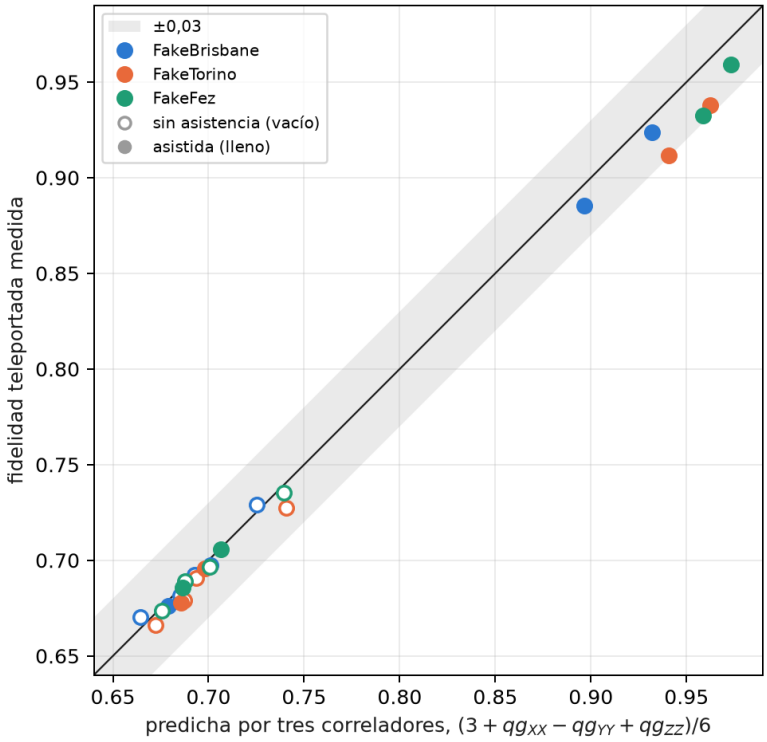


Figura 13.1: Fidelidad teleportada medida frente a la predicha por tres correladores, 4 enlaces × 2 protocolos × 3 modelos de ruido simulados. Las 24 caen dentro de ±0,03 de la diagonal.

Las predicciones registradas querían algo más: que la diferencia aislara el ruido de la medición de Bell. Eso falló. La predicción quedó por debajo del óptimo sin ruido en 5 de 24 casos (A1), no siempre por encima de la teleportada (A2, 3 de 24, todos dentro de dos errores de disparo) y la diferencia no siempre fue mayor con asistencia (A3, 2 de 12). La razón es que los tres circuitos de correladores leen dos qubits de datos y el anuncio, así que llevan casi todo el ruido que ve la teleportación. **Sirven como predictor, no como descomposición.**

13.3. Doble carril: cada pérdida se anuncia

En carril simple, un qubit es un fotón presente o ausente, y perder el fotón convierte un $|1\rangle$ en un $|0\rangle$ válido: la pérdida no se ve. En **doble carril**, cada qubit es un fotón en dos modos, $|0_L\rangle = |10\rangle$ y $|1_L\rangle = |01\rangle$. Las compuertas lógicas se construyen para conservar el número de fotones: el CNOT lógico es un SWAP controlado de los modos del blanco, el CZ lógico un CZ entre modos, y las compuertas de un qubit actúan sobre el subespacio $\{|10\rangle, |01\rangle\}$. Toda pérdida deja el par de Bob con peso 0, y el filtro qg (peso 1 en cada par) **anuncia todas las pérdidas, la de la fibra incluida, sin ayuda de los otros usuarios**.

Sin ruido de compuertas, el resultado es limpio:

$$F_{\text{filtrada}} = 1 \text{ a cualquier distancia}, \qquad \text{conservado} = \eta, \qquad F_{\text{cruda}} = \frac{1+\eta}{2},$$

donde la cruda supone que Bob adivina cuando no llega fotón, y queda por debajo del óptimo de carril simple $(2+\eta)/3$. El filtro convierte pérdida en tasa: la fidelidad no baja con la distancia, baja la cantidad de pares útiles. El precio es el circuito: 65–66 compuertas de dos qubits, seis veces las de carril simple.

13.4. Lo que mide el doble carril en dispositivos simulados

Con el par de Bell ($\alpha = \pi/4$), seis entradas y 10 000 disparos (§158), de las cinco predicciones del doble carril se cumplió una sola (B4: la cruda queda por debajo de carril simple en las 12 combinaciones, 0,516–0,595). Las otras cuatro fallaron, y la mayoría por la misma causa:

Tabla 13.1: Doble carril con el filtro qg en tres modelos de ruido simulados; enlaces en el orden (0, 4), (0, 8), (20, 4), (20, 8).

dispositivo simulado	filtrada, (0 km, 1:4) → (20 km, 1:8)	conservado / η	20 km: filtrada frente a F^* sin ruido de carril simple
FakeBrisbane	0,786; 0,720; 0,709; 0,650	0,91 → 1,98	0,709 / 0,714 (1:4); 0,650 / 0,692 (1:8)

dispositivo simulado	filtrada, (0 km, 1:4) → (20 km, 1:8)	conservado / η	20 km: filtrada frente a F^* sin ruido de carril simple
FakeTorino	0,847; 0,790; 0,783; 0,727	0,97 → 2,14	0,783 / 0,714; 0,727 / 0,692
FakeFez	0,869; 0,814; 0,791; 0,710	0,98 → 1,74	0,791 / 0,714; 0,710 / 0,692

Los falsos anuncios ponen un piso (B1, B2 y B5 fallaron). Cuando el fotón se pierde, un error de compuerta o de lectura puede dejar igual el par de Bob con peso 1: a 20 km, $(\text{conservado} - \eta)/(1-\eta)$ es del 3 al 6 %. Esos disparos llevan una fidelidad de alrededor de 1/2, y a medida que η baja pesan más entre los conservados. Con una probabilidad de falso anuncio p_f, la fidelidad filtrada es

$$F_{\text{filtrada}} = \frac{\eta\, F_0 + (1-\eta)\, p_f/2}{\eta + (1-\eta)\, p_f},$$

que cae con la distancia aunque el canal no agregue ningún error (Figura 13.2). Es el piso de cuentas oscuras de un enlace anunciado real, producido aquí por errores de compuerta y de lectura.

Aun así, anunciar gana a 20 km. En un análisis posterior, no registrado, en FakeTorino y FakeFez la filtrada de doble carril supera al óptimo de carril simple **sin ruido** en los dos divisores: 0,783 y 0,791 contra 0,714 con 1:4; 0,727 y 0,710 contra 0,692 con 1:8. Lo logra con seis veces las compuertas de dos qubits. La cruda pierde en todos lados (B4), así que la ganancia es del filtro. B3, la versión registrada de esa comparación (contra la teleportada con ruido), falló sólo en FakeBrisbane a (20 km, 1:8).

La comparación con el trabajo de variables continuas es cualitativa: allí la fidelidad es determinista y cae con la distancia y con N; aquí el filtro mantiene alta la fidelidad y paga en tasa (conservado $\approx \eta$), hasta que los falsos anuncios, no la pérdida, ponen el límite.

13.5. Intercambio de entrelazamiento en cadena

Para ir más lejos que un enlace, una red encadena pares: un nodo intermedio hace una medición de Bell entre sus dos mitades, y los extremos quedan entrelazados (intercambio de entrelazamiento, *entanglement swapping*). Esta sección es nueva

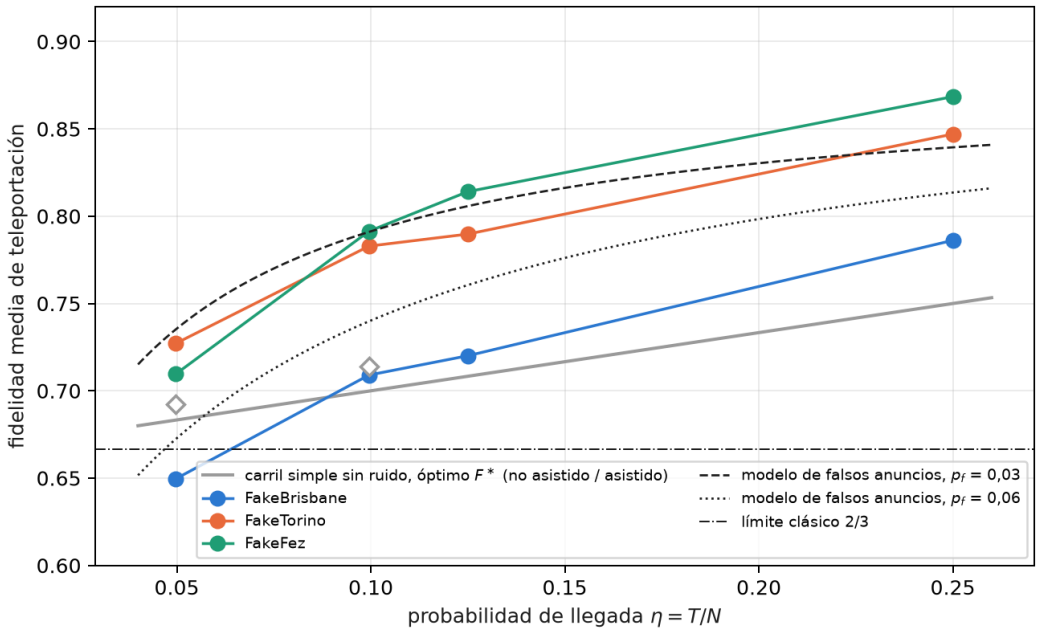


Figura 13.2: Fidelidad filtrada del doble carril en función de la probabilidad de llegada, en tres modelos de ruido simulados, frente al óptimo sin ruido de carril simple (línea gris; los rombos son el asistido a 20 km). Las curvas negras son el modelo de falsos anuncios con $F_0 = 0{,}87$, una ilustración, no un ajuste.

en el libro: es álgebra exacta de matrices densidad, verificada en el script de figuras, sin corrida en dispositivos.

Para pares diagonales en la base de Bell, que son los que dejan los ruidos de Pauli del capítulo 12, el resultado en qg es una regla de una línea: **los correladores se multiplican**. Después de intercambiar dos pares, con la corrección de Pauli que corresponde a cada resultado,

$$qg_{PP}^{(1\to3)} = qg_{PP}^{(1\to2)} \cdot qg_{PP}^{(2\to3)}, \qquad P \in \{X, Y, Z\},$$

y en una cadena de n enlaces iguales, cada correlador queda elevado a la n. Con pares despolarizados de parámetro w ($qg_{XX} = qg_{ZZ} = w$, $qg_{YY} = -w$), la fidelidad de teleportación del par final es $F = (1 + w^n)/2$, y supera el límite clásico mientras $w^n > 1/3$, es decir, hasta $n \leq \ln 3 / \ln(1/w)$: 21 enlaces con $w = 0{,}95$, 10 con $w = 0{,}9$ y 4 con $w = 0{,}8$ (Figura 13.3).

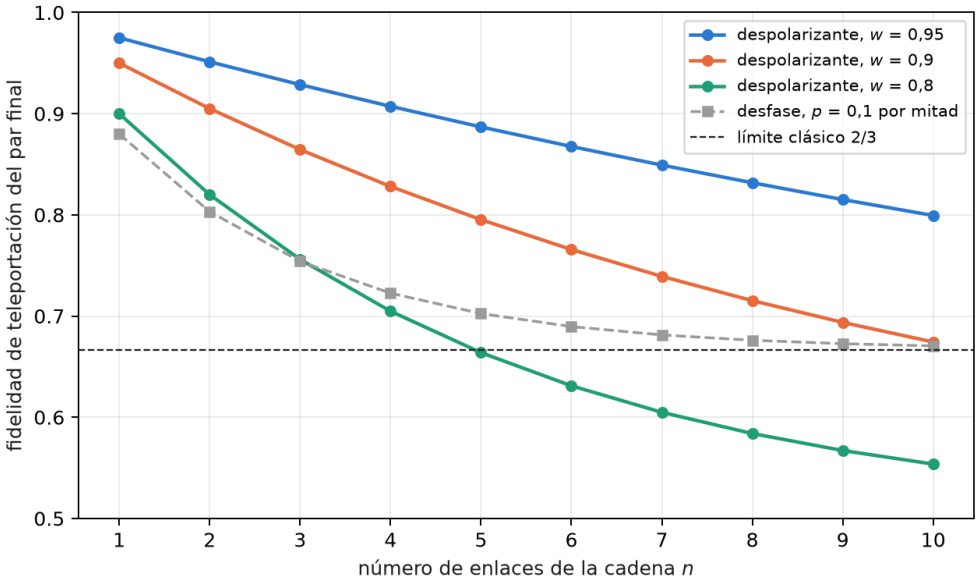


Figura 13.3: Fidelidad de teleportación del par final de una cadena de n enlaces sin destilación. Con ruido despolarizante cae como $(1+w^n)/2$ y cruza el límite clásico; con desfase, qg_{ZZ} se conserva en 1 y la fidelidad tiende a 2/3 sin cruzarlo.

La lectura por correladores dice además qué error se acumula. Con desfase, $qg_{ZZ} = 1$ en cada enlace y por lo tanto en toda la cadena, mientras qg_{XX} y qg_{YY} decaen como $0{,}64^n$: el par final conserva las correlaciones en Z y pierde

las de fase, y su fidelidad tiende a 2/3 desde arriba. Es la misma firma de la tabla de ruidos del capítulo 12, propagada por la cadena, y es la que decide dónde conviene destilar.

La conexión con el doble carril es directa: en una cadena de pares de doble carril, cada medición de Bell intermedia también conserva el número de fotones, y el filtro anuncia las pérdidas de todos los enlaces a la vez. Ese experimento no está hecho.

13.6. Lo que queda pendiente

Tres temas del índice no tienen todavía respaldo en el repositorio, y quedan como propuestas, no como resultados:

- el enrutamiento y la conmutación cuántica pasiva en topologías metropolitanas con varios portadores;
- una cadena de repetidores con doble carril y filtro en dispositivos simulados, que pondría a prueba la regla de multiplicación de esta sección con ruido real de compuertas;
- la teleportación de compuertas (*gate teleportation*) y su lectura en correladores qg.

13.7. Sin qang y con qang

Tabla 13.2: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
predecir la fidelidad de teleportación	teleportar y medir (10–11 compuertas de dos qubits)	tres correladores del recurso (4–5 compuertas): error máximo 0,029 en 24 casos	**a favor** en costo de circuito; la fórmula es conocida, qang la vuelve una lectura lineal con barra de error
anunciar pérdidas	carril simple: la pérdida no se ve	doble carril con filtro de peso: toda pérdida se anuncia	del **filtro y la codificación**, no de la escala

acción	sin qang	con qang	diferencia
propagar ruido por una cadena de intercambios	componer canales	los correladores qg se multiplican; $F = (1 + w^n)/2$	**a favor** en claridad: una regla de una línea y la firma de qué error se acumula

Balance. Los correladores qg son la parte de qang que más rinde en redes: predicen y propagan con reglas lineales. La ganancia grande del capítulo, el doble carril, es de la codificación y el filtro.

13.8. En código

```
from qang import qpon

# la fidelidad de teleportación, desde tres correladores del recurso
qpon.fidelity_from_correlators(xx=0.84, yy=-0.81, zz=0.73)      # 0.897
qc = qpon.resource_circuit(alpha=1.231, transmission=1.0, n_users=8, basis="X")

# doble carril: formas cerradas sin ruido y el circuito de 8 qubits
qpon.dual_rail_fidelities(alpha=0.7854, eta=0.05)          # filtrada 1.0, cruda 0.525
qc_dual = qpon.dual_rail_teleport_circuit(alpha=0.7854, eta=0.05, input_index=2)
```

13.9. Resumen

- La fidelidad de teleportación es lineal en tres correladores qg del recurso, $F = (3 + qg_{XX} - qg_{YY} + qg_{ZZ})/6$; en 24 casos simulados predice la teleportada a 0,029, aunque no aísla el ruido de la medición de Bell.
- En doble carril todas las compuertas conservan el número de fotones y el filtro anuncia cada pérdida: sin ruido, $F = 1$ a cualquier distancia con tasa η.
- Con ruido, los falsos anuncios (3–6 % a 20 km) ponen un piso y la fidelidad filtrada cae con la distancia; aun así, en dos de tres modelos supera al óptimo sin ruido de carril simple a 20 km (análisis posterior).
- En una cadena de intercambios, los correladores de pares diagonales en Bell se multiplican; con despolarización, $F = (1 + w^n)/2$, y con desfase qg_{ZZ} sobrevive entero.

- Enrutamiento, repetidores en dispositivos y teleportación de compuertas quedan pendientes.

Notas bibliográficas

La codificación de doble carril en óptica lineal es la de Knill et al. (2001); el intercambio de entrelazamiento, Żukowski et al. (1993), y los repetidores cuánticos, Briegel et al. (1998). La teleportación de base es Bennett et al. (1993). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte V

V. Relatividad, bucles temporales y evaporación de agujeros negros (`qang.postselection`)

14 Curvas temporales cerradas posseleccionadas (P-CTC) y resolución de paradojas

La Parte V trata dos modelos de la teoría de la información que usan el vocabulario de la relatividad: los bucles temporales y la evaporación de agujeros negros. Conviene decirlo desde el principio: **son modelos de teoría de la información, no afirmaciones sobre el espacio-tiempo** (§164). Los dos son teleportación con posselección sobre un resultado de Bell, es decir, un filtro sobre el sector de Bell, y por eso entran en este libro. Este capítulo trata el bucle temporal en las dos formulaciones conocidas, la posseleccionada (P-CTC) y la de Deutsch (D-CTC), y lo que una lectura qg distingue entre ellas.

14.1. Desde la base: la probabilidad de éxito tiene ángulo qang φ

En el modelo más simple, el qubit que "viaja al pasado" sufre una rotación $R_X(\varphi)$, y la posselección tiene éxito con probabilidad

$$P_{\text{éxito}} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Es la ecuación de probabilidad del capítulo 1 con $p_0 = P_{\text{éxito}}$, de modo que su ángulo qang es exactamente la rotación, $\arccos(2P - 1) = \varphi$, su lectura es $m = 1000 \cos\varphi$, y la tasa de éxito medida con N intentos da φ con incertidumbre $1/\sqrt{N}$. La paradoja del abuelo, $\varphi = \pi$, está en el polo sur: $P = 0$, $m = -1000$.

14.2. Dos maneras de cerrar un bucle temporal

Deutsch (D-CTC, 1991). (Deutsch 1991) El sistema en el bucle tiene que ser consistente consigo mismo: su estado ρ_C es un punto fijo de la evolución, $\rho_C =$

$\mathrm{Tr}_S[U(\rho_S \otimes \rho_C)U^\dagger]$. Siempre existe al menos un punto fijo, de modo que nunca hay paradoja, pero puede haber varios, y hace falta una regla adicional para elegir; la habitual es tomar el de máxima entropía.

Posselección (P-CTC; Bennett y Svetlichny, Lloyd y colaboradores, 2011). (Svetlichny 2011; Lloyd et al. 2011) El qubit que viaja al pasado, C, es la mitad de un par de Bell (C, A). Después de que C interactúa con el sistema S, se proyecta (C, A) otra vez sobre el estado de Bell: es una teleportación de C hacia su propio pasado, con la medición de Bell forzada a su resultado trivial. La evolución efectiva de S es

$$\rho_S \mapsto \frac{\mathrm{Tr}_C(U)\,\rho_S\,\mathrm{Tr}_C(U)^\dagger}{\mathrm{Tr}[\ldots]},$$

que no es lineal por la normalización. En el circuito, la proyección es una medición de Bell y quedarse con los disparos que dan 00: un filtro sobre el sector de Bell.

14.3. La ley de éxito y la paradoja del abuelo

Con $R_X(\varphi)$ sobre C solo, $\mathrm{Tr}_C(U) = \mathrm{Tr}\,R_X(\varphi)/2 = \cos(\varphi/2)$, y el éxito es $\cos^2(\varphi/2)$. En $\varphi = \pi$ el qubit invierte su propio pasado: es la paradoja del abuelo, y en P-CTC **tiene probabilidad cero**. No se resuelve: no ocurre. En D-CTC el mismo caso tiene como punto fijo el estado máximamente mezclado, y ocurre con probabilidad 1, como una moneda.

En tres **modelos de ruido simulados**, con 8000 disparos (§164), la ley de éxito se cumple dentro de 0,05 salvo en $\varphi = 0$ en dos dispositivos (C1 falló: 0,950 y 0,931 contra 1), y la paradoja queda suprimida hasta el piso de ruido en dos de tres (C2 falló en FakeTorino):

Tabla 14.1: La ley de éxito de la P-CTC en los extremos, modelos de ruido simulados.

dispositivo simulado	éxito en $\varphi = 0$ (exacto 1)	éxito en $\varphi = \pi$, la paradoja (exacto 0)
FakeBrisbane	0,950	0,019
FakeTorino	0,931	0,056
FakeFez	0,983	0,009

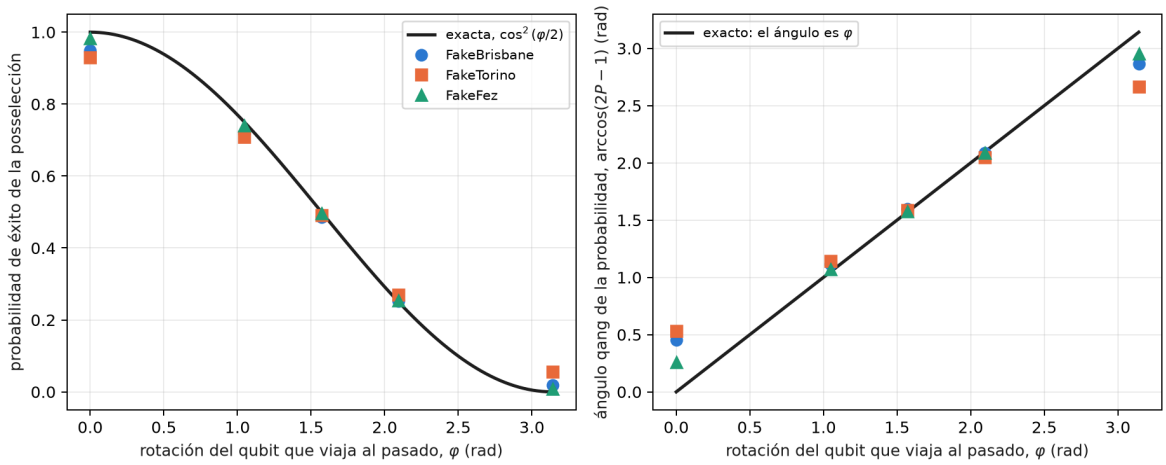


Figura 14.1: Izquierda: probabilidad de éxito de la posselección frente a la rotación, exacta y en tres modelos de ruido simulados. Derecha: su ángulo qang, que es la rotación misma; los apartamientos mayores están en los polos, donde un error chico de probabilidad es un error grande de ángulo.

La Figura 14.1 muestra algo propio de la lectura en ángulo. En el interior, el ángulo qang de la tasa medida reproduce φ a pocos centésimos de radián; en los polos se aparta hasta medio radián. Es la no linealidad del mili-qang en ángulo del capítulo 1: junto al polo, 1 m-qg son 2,56°, y los 34–138 m-qg de error de los dispositivos en $\varphi = 0$ se vuelven 0,26–0,53 rad, es decir, 41,6–84,6 qga en la escala angular del capítulo 1 (Sección 1.4). En esa escala la tasa de éxito es $\cos^2(\pi\varphi_{qga}/1000)$, y la paradoja del abuelo está en $\varphi = 500$ qga.

14.4. La rotación controlada por el sistema

Si es el sistema S el que controla la rotación de C, la traza parcial es un operador sobre S:

$$\mathrm{Tr}_C(U) = \mathrm{diag}\big(1,\ \cos\tfrac{\varphi}{2}\big)\,,$$

y la rama de S que produciría la paradoja queda atenuada por $c = \cos(\varphi/2)$. Desde $|+\rangle$, el estado posseleccionado de S tiene

$$qg_Z(S) = \frac{1-c^2}{1+c^2}, \qquad qg_X(S) = \frac{2c}{1+c^2},$$

con éxito $(1+c^2)/2$. En $\varphi = \pi$, $qg_Z(S) = 1$: el sistema queda forzado a la rama que no invierte el pasado. En los modelos simulados, FakeFez sigue la curva a 0,061 en todo el rango, FakeBrisbane lee 0,903 en $\varphi = \pi$, y FakeTorino pierde la mayor parte de la supresión (0,600): la predicción C3 falló.

14.5. Lo que una lectura qg distingue entre D-CTC y P-CTC

Esta sección es nueva en el libro: es álgebra exacta de matrices densidad, calculada en el script de figuras, sin corrida en dispositivos. Se toma el mismo circuito controlado, con S en $|+\rangle$, y se calcula la salida de S en las dos formulaciones.

En D-CTC, el canal sobre C es $\rho_C \mapsto \frac{1}{2}\rho_C + \frac{1}{2}R_X\rho_C R_X^\dagger$, y es punto fijo todo estado que conmute con $R_X(\varphi)$. Con la regla de máxima entropía, $\rho_C = I/2$, y la salida de S es

$$qg_Z(S) = 0, \qquad qg_X(S) = \cos\frac{\varphi}{2}, \qquad r = \cos\frac{\varphi}{2}.$$

Las dos formulaciones se separan en lecturas distintas (Figura 14.2):

Tabla 14.2: El sistema S después del bucle controlado, en las dos formulaciones.

φ	P-CTC: m_Z, m_X (m-qg)	D-CTC: m_Z, m_X (m-qg)	éxito P-CTC
0	0, 1000	0, 1000	1
$\pi/3$	143, 990	0, 866	0,875
$\pi/2$	333, 943	0, 707	0,750
$2\pi/3$	600, 800	0, 500	0,625
π	1000, 0	0, 0	0,500

La diferencia es cualitativa. **P-CTC cambia las poblaciones** de S (la rama paradójica pierde peso) y deja un estado puro; **D-CTC no toca las poblaciones** y sólo le quita coherencia. Una lectura en Z de S ya decide entre los dos modelos, y los dispositivos simulados, con todo su ruido, están del lado de P-CTC, como debe ser, porque el circuito es el de P-CTC.

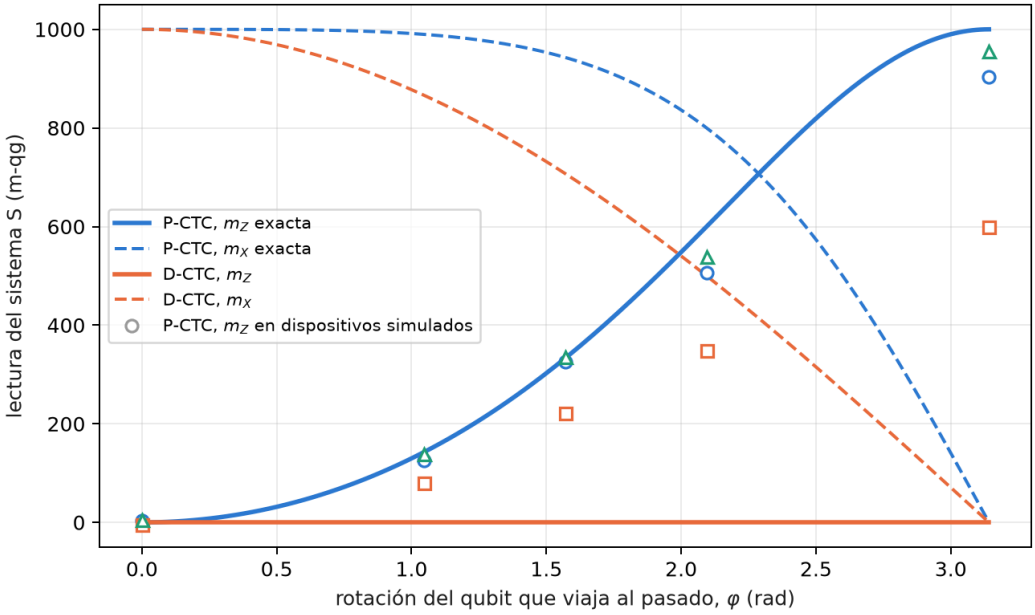


Figura 14.2: Lecturas del sistema S después del bucle controlado. P-CTC (azul) mueve la población, m_Z, hacia la rama sin paradoja; D-CTC (naranja) deja $m_Z = 0$ y sólo decohere, bajando m_X. Los marcadores son la P-CTC en tres modelos de ruido simulados.

La ambigüedad de Deutsch también se lee. Con $\varphi = \pi/2$, el estado $|+\rangle$ también es punto fijo, y da la misma $qg_Z(S) = 0$ y la misma $qg_X(S) = 0{,}707$, pero $qg_Y(S) = -0{,}707$ y radio 1, contra $qg_Y = 0$ y radio 0,707 con $I/2$. Las dos soluciones de D-CTC difieren en el radio local del capítulo 5: la regla de máxima entropía elige el punto fijo que deja a S más mezclado.

14.6. El costo de la posselección

"Viajar en el tiempo" en este modelo cuesta disparos. Cada disparo útil exige, en promedio, $1/P_{\text{éxito}}$ disparos: 2 en $\varphi = \pi/2$, 4 en $2\pi/3$, 400 a una décima de radián de la paradoja (Figura 14.3). Con la rotación controlada el costo nunca pasa de 2, porque la mitad de la superposición de S no paga nada. Es la misma cuenta que el filtro de sector de los capítulos anteriores, con una diferencia: aquí la fracción descartada no es ruido sino la física del modelo, y no se puede reducir.

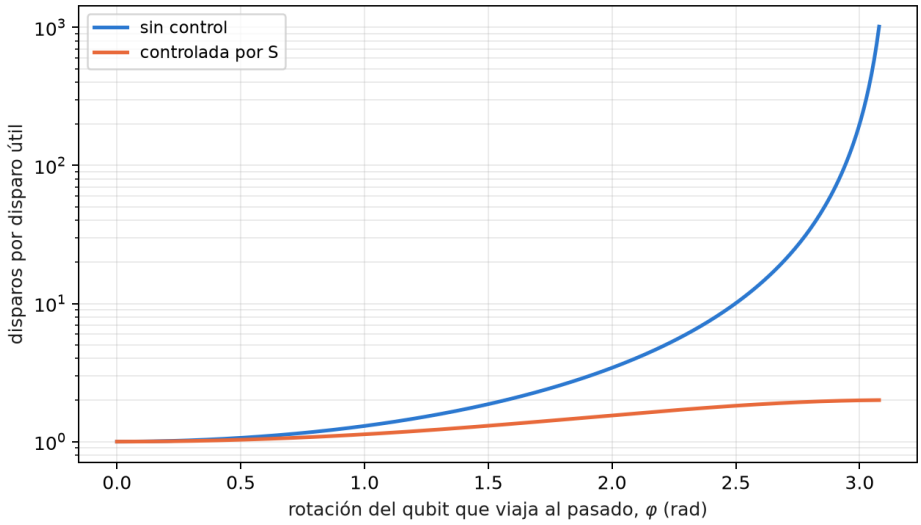


Figura 14.3: Disparos necesarios por cada disparo útil de la posselección, sin control y con la rotación controlada por S.

14.7. Lo que queda pendiente

Dos temas del índice no tienen todavía respaldo y quedan como propuestas: la no linealidad de las P-CTC aplicada a discriminar estados no ortogonales (falta el circuito y la predicción), y una corrida de la comparación D-CTC frente a P-CTC

en dispositivos, que exigiría preparar el punto fijo de Deutsch y no sólo posseleccionar.

14.8. Sin qang y con qang

Tabla 14.3: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
leer la rotación del bucle	invertir $\cos^2(\varphi/2)$	el ángulo qang de la tasa de éxito es φ, con $\sigma = 1/\sqrt{N}$	**equivalente** en el interior; en los polos la lectura en ángulo **amplifica** el error (34–138 m-qg se vuelven 0,26–0,53 rad), y eso cuenta **en contra**
verificar la supresión de la paradoja	probabilidad de éxito y estado de S por tomografía	$m_Z(S)$: 903, 600 y 955 m-qg contra 1000	**unidad**; la supresión es de la posselección
distinguir D-CTC de P-CTC	comparar matrices densidad	P-CTC mueve m_Z; D-CTC no lo mueve y baja m_X	**a favor**: una sola lectura en Z decide el modelo
distinguir los puntos fijos de D-CTC	entropía de cada solución	el radio local del capítulo 5: 0,707 frente a 1	**a favor**: la ambigüedad se vuelve una lectura
reducir el ruido	—	la posselección es el filtro; la escala qang no agrega nada	**ninguna**

Balance. En este capítulo qang rinde como herramienta de diagnóstico: dice con una o dos lecturas qué modelo de bucle está operando y cuál de las soluciones de Deutsch se eligió. La ley de éxito es la ecuación de probabilidad del capítulo 1, y con ella vienen también sus límites junto a los polos.

14.9. En código

```
import math
from qang import postselection as ps

ps.pctc_success(2 * math.pi / 3)            # 0.25: éxito de la posselección
math.acos(2 * ps.pctc_success(2.0) - 1)       # 2.0: el ángulo qang es la rotación
ps.pctc_controlled_qg_z(math.pi)             # 1.0: la rama paradójica, suprimida
qc = ps.pctc_circuit(math.pi, controlled=True)  # S, C, A; éxito = C y A leen 0
```

14.10. Resumen

- Los bucles temporales de este capítulo son modelos de información: teleportación con posselección sobre un resultado de Bell.
- En P-CTC, la probabilidad de éxito es $\cos^2(\varphi/2)$ y su ángulo qang es φ; la paradoja del abuelo tiene probabilidad cero y, en dos de tres modelos simulados, queda en el piso de ruido.
- Con la rotación controlada, $qg_Z(S) = (1-c^2)/(1+c^2)$: la rama paradójica se suprime; FakeTorino pierde la mayor parte de la supresión.
- D-CTC no cambia las poblaciones de S y sólo le quita coherencia; una lectura en Z separa los dos modelos, y el radio local separa los puntos fijos de Deutsch.
- La posselección cuesta $1/P$ disparos por disparo útil; es física del modelo, no ruido, y no se reduce.

Notas bibliográficas

El modelo autoconsistente de curvas temporales cerradas es Deutsch (1991); el modelo por posselección y su prueba experimental, Lloyd et al. (2011), y la comparación entre ambos, Svetlichny (2011). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

15 Termodinámica de agujeros negros, caos cuántico y el decodificador de Yoshida–Kitaev

Este es el segundo modelo de la Parte V, y vale la misma advertencia que en el capítulo 14: **es un modelo de teoría de la información, no una afirmación sobre agujeros negros reales** (§164). Un agujero negro de pocos qubits, una unitaria que esparce la información y una teleportación con posselección sobre un resultado de Bell: el mismo filtro sobre el sector de Bell del capítulo anterior, ahora puesto a recuperar un mensaje que cayó al horizonte.

15.1. Desde la base: éxito 1/4 y el ecuador de la fidelidad

El protocolo produce dos números, y los dos son probabilidades, de modo que la ecuación de probabilidad del capítulo 1 los lee directamente. La posselección tiene éxito con probabilidad $P = 1/4$: su lectura es $m_P = 1000(2P - 1) = -500$ y su ángulo qang $\arccos(-1/2) = 2\pi/3$. La fidelidad F del par recuperado con un par de Bell es la probabilidad de que la medición de Bell dé su resultado trivial, y se lee igual, $m_F = 1000(2F - 1)$.

La escala tiene aquí una virtud concreta: **el umbral que importa cae en el ecuador**. Una fidelidad de Bell mayor que $1/2$ certifica entrelazamiento, y $F = 1/2$ es $m_F = 0$. Sin scrambling, el par sale máximamente mezclado, $F = 1/4$, y lee -500; con scrambling, $F = 1$, y lee 1000. Decodificar es cruzar el ecuador.

15.2. La paradoja de la información y la complementariedad

Hawking (1976) mostró que un agujero negro radia con espectro térmico, y que la radiación no parece depender de lo que cayó adentro. Si el agujero se evapora por completo, un estado puro terminaría en uno mixto: la evolución no sería unitaria. La complementariedad (Susskind et al. 1993) y, sobre todo, el argumento de Page

(1993) llevaron a la posición contraria, hoy mayoritaria: la información sale en la radiación, codificada en correlaciones finas.

Hayden y Preskill (2007) preguntaron cuándo sale. Su respuesta, para un agujero negro que ya pasó la mitad de su vida y cuya dinámica esparce la información rápido, es "casi enseguida": un mensaje de pocos qubits arrojado al agujero puede reconstruirse con apenas unos qubits más de radiación, si se tiene la radiación temprana. Yoshida y Kitaev (2017) dieron un decodificador explícito, y es el que se corre en este capítulo.

15.3. Scrambling: un micro-agujero negro de 3 qubits

El agujero negro de juguete tiene 3 qubits: el mensaje A y dos qubits B_1, B_2 que ya estaban adentro. Su dinámica es una unitaria U sobre los tres, y que U "esparza la información" tiene una definición operativa: **todo operador de Pauli de un qubit termina, después de U, actuando sobre los tres qubits**. Para un Clifford se verifica sin aproximaciones, evolucionando los 9 Paulis X, Y, Z de cada qubit. `find_scrambler` toma el primer Clifford aleatorio (semilla 164) que cumple la condición, y sus 9 Paulis tienen peso 3.

El scrambling es la versión cuántica del caos: un error local (un Pauli) se vuelve, después de la dinámica, un error de todo el sistema, y ninguna medición de un qubit lo detecta. Por eso no sorprende que un agujero negro "oculte" el mensaje, y por eso sí sorprende que se pueda recuperar.

15.4. El protocolo de Hayden–Preskill y el decodificador

El circuito tiene 8 qubits. El mensaje A está entrelazado con una referencia R, que es quien lo arroja; el agujero negro B está entrelazado con la radiación temprana B', en manos del observador exterior. Después de U sobre (A, B_1, B_2), un qubit D (la salida de B_2) se radia. El observador tiene D y B', y además prepara una copia del experimento: un par (A', R') y la unitaria conjugada U^* sobre (A', B_1', B_2'). Luego **posselecciona (D, D') sobre el estado de Bell**. Si tiene éxito, el entrelazamiento de A con R pasó a R': el mensaje se teleportó desde el interior.

Para un scrambler, la posselección tiene éxito con probabilidad $1/d_A^2 = 1/4$ y la fidelidad del par (R, R') es 1. Sin scrambling ($U = I$), la posselección casi siempre tiene éxito, porque D no lleva nada de A, y la fidelidad es la de un par al azar, $1/4$. La posselección es, como en el capítulo 14, un filtro sobre el sector de Bell de (D, D').

15.5. La ley exacta $P \cdot F = 1/4$

Esta sección es nueva en el libro. En el decodificador probabilístico de Yoshida y Kitaev, el éxito y la fidelidad no son independientes:

$$P\,F = \frac{1}{d_A^2} = \frac{1}{4}.$$

El script de figuras lo verifica en estado exacto sobre 60 Cliffords aleatorios y 25 unitarias de Haar de 3 qubits, y en todos los tamaños de la sección siguiente: en 3 qubits la desviación máxima es 3×10^{-16}. En la escala del capítulo 1 la ley es una hipérbola,

$$(1000 + m_P)(1000 + m_F) = 10^6, \qquad \text{o bien} \qquad \cos\frac{\theta_P}{2}\,\cos\frac{\theta_F}{2} = \frac{1}{2},$$

y tiene una consecuencia práctica: **sin ruido, el éxito ya dice la fidelidad**. Un éxito de $1/4$ ($m_P = -500$) exige $F = 1$; un éxito de 1 ($m_P = 1000$) exige $F = 1/4$. Entre los Cliffords aleatorios de 3 qubits, 27 de 60 decodifican perfecto.

Con ruido la ley se rompe, y en qué dirección se rompe es lo que la vuelve útil. El ruido total lleva a (D, D') al estado mezclado, cuyo éxito es *también* $1/4$, con $F = 1/4$: el éxito solo no distingue un decodificador perfecto de uno destruido por el ruido. El producto sí: $4PF$ vale 1 en el primero y $1/4$ en el segundo.

15.6. En modelos de ruido simulados

Con 8000 disparos en tres **modelos de ruido simulados** (§164), el circuito con scrambler, 90 compuertas de dos qubits después de transpilar, da:

Tabla 15.1: El decodificador de Yoshida–Kitaev en tres modelos de ruido simulados.

dispositivo simulado	éxito P (m_P)	fidelidad F (m_F)	$4PF$	sin scrambling: F (m_F)
exacto	0,250 (−500)	1 (1000)	1	0,250 (−500)
FakeBrisbane	0,260 (−481)	0,547 (93)	0,568	0,248 (−504)
FakeTorino	0,248 (−504)	0,578 (156)	0,573	0,250 (−501)
FakeFez	0,246 (−508)	0,742 (484)	0,731	0,250 (−500)

dispositivo simulado	éxito P (m_P)	fidelidad F (m_F)	$4PF$	sin scrambling: F (m_F)

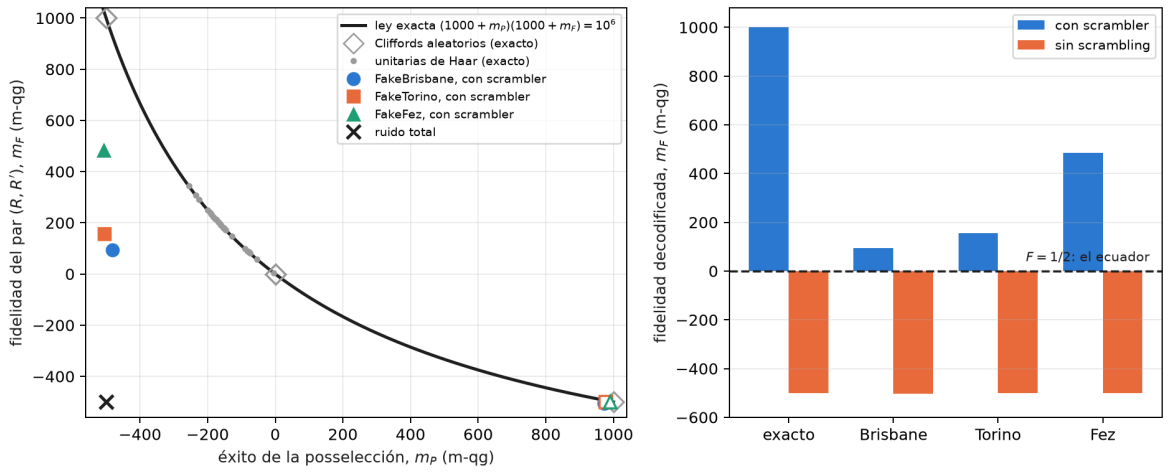


Figura 15.1: Izquierda: el plano éxito–fidelidad en m-qg. La curva es la ley exacta $PF = 1/4$; los Cliffords y las unitarias de Haar caen sobre ella; los dispositivos con scrambler (marcadores llenos) caen debajo, hacia el punto de ruido total; sin scrambling (huecos) quedan sobre ella, en $m_P \approx 1000$. Derecha: la fidelidad decodificada en m-qg; los tres dispositivos con scrambler cruzan el ecuador.

Las tres corridas con scrambler cruzan el ecuador (H3), y el éxito queda a menos de 0,05 de $1/4$ (H2). Pero la Figura 15.1 muestra por qué H2 no es evidencia de decodificación: el éxito de los tres dispositivos es el mismo que daría el ruido total. Lo que separa a FakeFez de los otros dos es la fidelidad, y $4PF$ lo resume en un número: 0,73 contra 0,57. La predicción H1 (ventaja de fidelidad mayor que 0,3 sobre el caso sin scrambling en los tres) falló por 0,001 en FakeBrisbane.

15.7. Agujeros negros más grandes

Esta sección también es nueva: estados exactos, conteo de compuertas y una simulación con el modelo de ruido de FakeFez, sin corrida en dispositivos. El circuito se generaliza a un agujero negro de n qubits con k qubits radiados: $2n+2$ qubits en total, 16 para $n = 7$.

Dos resultados ordenan el tema. El primero: **con un solo qubit radiado, un agujero negro genérico no alcanza**. Para una unitaria de Haar el éxito promedio es $P \approx \frac{1}{4} + 4^{-k} - 4^{-k-1}$, y por la ley, $F = 1/(4P)$: con $k = 1$, $F \approx 4/7 = 0{,}57$, apenas arriba del ecuador, sea $n = 3$, 5 o 7. Hay que radiar algo más que el mensaje: con $k = 2$, $F \approx 0{,}84$; con $k = 3$, $F \approx 0{,}95$ (Figura 15.2, izquierda). Es la versión cuantitativa de "unos qubits más" de Hayden y Preskill. El scrambler Clifford de 3 qubits, con $F = 1$ y $k = 1$, es un caso especial, no el típico.

El segundo: **el costo en compuertas separa los dos tipos de scrambler**. Un scrambler Clifford se transpila como circuito Clifford: 35, 126 y 252 compuertas de dos qubits para $n = 3$, 5 y 7. Una unitaria de Haar se sintetiza como unitaria genérica, y su costo crece como 4^n: 92, 1908 y 32 680 (Figura 15.2, derecha). Hay además una lección para la corrida de la §164: el mismo scrambler de 3 qubits, pasado al transpilador como matriz, se sintetizó con 90 compuertas; pasado como Clifford, con 35, y en el modelo de FakeFez la fidelidad sube de 0,742 a 0,887 (simulación nueva con otra semilla, no la corrida guardada).

Tabla 15.2: El decodificador con scramblers Clifford perfectos de 3, 5 y 7 qubits, exacto y en el modelo de ruido de FakeFez.

agujero negro	qubits radiados	compuertas de dos qubits (FakeFez)	éxito en FakeFez (exacto 0,25)	F en FakeFez (m_F; exacta 1)	$4PF$ en FakeFez
3 qubits	1	35	0,253	0,887 (773)	0,899
5 qubits	2	126	0,191	0,802 (605)	0,613
7 qubits	3	252	0,105	0,882 (764)	0,370

La Tabla 15.2 muestra hasta dónde llega el filtro. La fidelidad se mantiene entre 0,80 y 0,89 aun con 252 compuertas, y no porque el ruido no actúe: la posseleción sobre k pares de Bell descarta los disparos en los que el ruido tocó a (D, D'), y con más pares descarta más. El éxito cae de 0,253 a 0,105 frente al $1/4$ exacto (con ruido total sería 4^{-k}, $1/64$ para $k = 3$). La fidelidad sola diría que el decodificador de 7 qubits es tan bueno como el de 3; $4PF$ dice que entrega 0,37 de lo que debería, porque paga en disparos lo que la fidelidad no muestra. Es la regla de los filtros de sector de los capítulos anteriores: el filtro mejora lo que queda a costa de la tasa, y $4PF$ pone las dos cosas en un número. Con ruido, la ley se rompe ahora por el otro lado: en 3 qubits cae la fidelidad, en 7 cae el éxito.

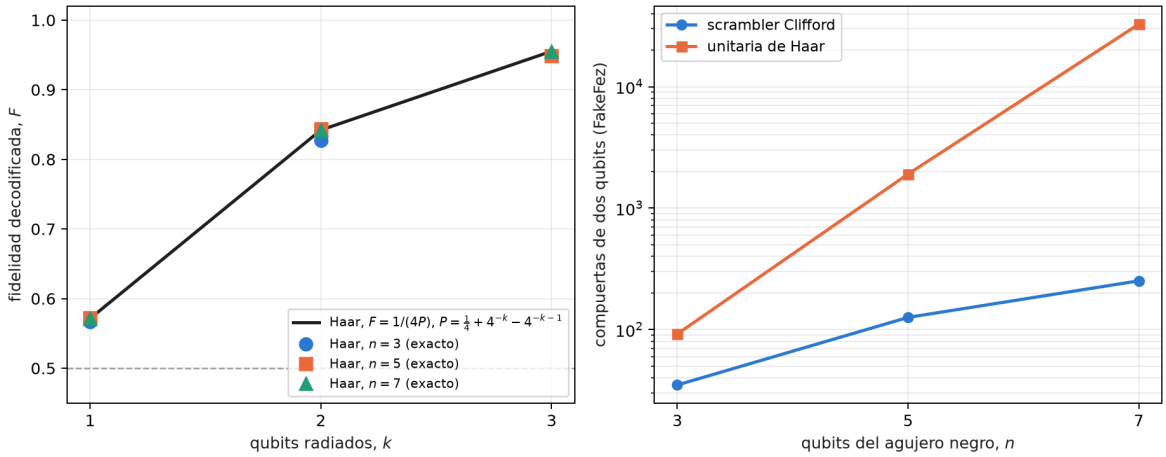


Figura 15.2: Izquierda: fidelidad decodificada de unitarias de Haar frente al número de qubits radiados, exacta para $n = 3, 5, 7$ y la fórmula de gran n. Derecha: compuertas de dos qubits del decodificador transpilado para FakeFez, con un scrambler Clifford y con una unitaria de Haar.

15.8. La curva de Page en juguete

Page (1993) predijo cómo crece el entrelazamiento de la radiación de un agujero negro que se evapora unitariamente: sube mientras la radiación es la parte menor, llega a su máximo cuando se radió la mitad, y baja a cero al final, porque el estado total es puro. Un juguete exacto: un estado de Haar de 8 qubits, con los primeros k como radiación.

El índice proponía leer esta curva con qg_S. **No funciona**, y conviene decir por qué. qg_S es la entropía de Shannon de una lectura en Z, y un estado aleatorio se ve al azar en cualquier base: la lectura conjunta de los k qubits radiados tiene entropía cercana a k en toda la evaporación, también cuando la radiación ya es casi pura (Figura 15.3, triángulos). Es el límite que ya documenta `qang.circuits` con los estados de grafo como contraejemplo: qg_S depende de la base y no mide entrelazamiento.

Lo que sí funciona usa las mismas lecturas qg, al cuadrado. La pureza de la radiación es la suma de los cuadrados de sus correladores de Pauli,

$$\operatorname{Tr}\rho^2 = \frac{1}{2^k} \sum_{P \in \{I,X,Y,Z\}^k} qg_P^2,$$

y $S_2 = -\log_2 \operatorname{Tr} \rho^2$, la entropía de Rényi de orden 2, es una cota inferior de la de von Neumann que sigue la curva de Page: en $k = 4$, la mitad, $S_2 = 2{,}98$ bits contra $S = 3{,}24$, y las dos vuelven a cero en $k = 8$, mientras la entropía de Shannon de la lectura en Z llega a 7,46. El costo es la cara desfavorable: $4^k - 1$ correladores, 255 para $k = 4$. (El script la calcula desde los correladores hasta $k = 4$; más allá usa $\operatorname{Tr} \rho^2$ directamente, que es la misma cantidad.)

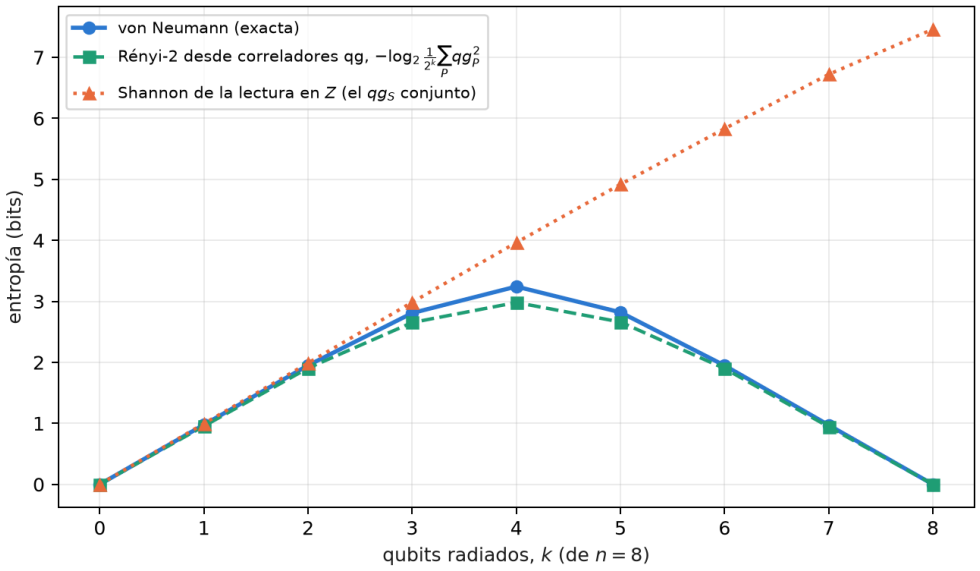


Figura 15.3: La curva de Page en juguete, 8 qubits. La entropía de von Neumann de la radiación y la de Rényi-2 calculada desde los correladores qg suben y bajan; la entropía de Shannon de la lectura en Z sigue subiendo y no ve la curva.

15.9. Agujeros de gusano atravesables

El decodificador de Yoshida–Kitaev es, en circuito, el mismo protocolo que en la literatura holográfica se llama teleportación por un agujero de gusano atravesable (Gao et al. 2017; Maldacena et al. 2017): dos sistemas entrelazados, una dinámica de scrambling en cada uno (la de un lado conjugada) y un acoplamiento entre ellos que deja pasar un qubit. La conjetura ER = EPR (Maldacena y Susskind 2013) propone que esos pares entrelazados son, en una teoría gravitatoria dual, un puente de Einstein–Rosen. El circuito no decide nada de eso; sí permite leer el resultado con las herramientas de este libro.

La fidelidad del par recuperado es lineal en tres correladores qg, como en el capítulo 13:

$$F = \frac{1 + qg_{XX} - qg_{YY} + qg_{ZZ}}{4}.$$

En estado exacto, con scrambler, $(qg_{XX}, qg_{YY}, qg_{ZZ}) = (1, -1, 1)$ y $F = 1$; sin scrambling, $(0, 0, 0)$ y $F = 1/4$. El experimento de Jafferis et al. (2022) en un procesador de Google usó un modelo de 7 qubits aprendido para imitar esta física, y su interpretación como agujero de gusano fue discutida (Kobrin et al. 2023). Este libro no corre ese experimento; la lectura en correladores queda como herramienta, no como evidencia.

15.10. Lo que queda pendiente

Ninguno de los resultados nuevos de este capítulo (la ley $PF = 1/4$ como diagnóstico, los agujeros negros de 5 y 7 qubits, la curva de Page con correladores) tiene corrida en dispositivos. Una corrida en hardware real del decodificador de 3 qubits, con 90 compuertas de dos qubits, sería el siguiente paso y tiene costo en créditos; queda fuera de este libro por ahora.

15.11. Sin qang y con qang

Tabla 15.3: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
decidir si el mensaje se recuperó	comparar F con 1/2	el signo de m_F: decodificar es cruzar el ecuador	**unidad**: el umbral queda en cero, pero es el mismo umbral

acción	sin qang	con qang	diferencia
juzgar la calidad del decodificador	P y F por separado	la ley $(1000 + m_P)(1000 + m_F) = 10^6$ y su resumen $4PF$	**a favor**, con matiz: la ley es de Yoshida y Kitaev, no de qang; la escala la vuelve una hipérbola legible y muestra que $m_P = -500$ no prueba nada
prever cuánta radiación hace falta	la fórmula de Haar	la misma fórmula, $F = 1/(4P)$	**ninguna**
la curva de Page	entropía de von Neumann por tomografía	qg_S en Z	**en contra**: qg_S no ve la curva
la curva de Page, otra vez	tomografía	Rényi-2 desde la suma de qg_P^2	**equivalente**: es tomografía de Pauli escrita en qg, con su costo $4^k - 1$
la fidelidad del agujero de gusano	medición de Bell del par (una configuración)	tres correladores qg	**ninguna** en costo, porque la medición de Bell ya da F; **a favor** como diagnóstico: los tres correladores dicen qué componente falla
reducir el ruido	—	la posselección es el filtro; la escala no agrega nada	**ninguna**

Balance. El aporte más claro de qang en este capítulo es de lectura: la ley exacta del decodificador se vuelve una curva en el plano de las dos lecturas, y en ese plano se ve de inmediato que el éxito correcto no es evidencia de decodificación. Donde el índice prometía más, la curva de Page con qg_S, el resultado es negativo, y lo que la reemplaza es tomografía de Pauli, no una propiedad de la escala.

15.12. En código

```
from qiskit.quantum_info import Statevector
from qang import postselection as ps

scr = ps.find_scrambler()                # Clifford de 3 qubits, semilla 164
qc = ps.yk_decoder_circuit(scr, measure=False)  # 8 qubits: R, A, B1, B2, B1', B2', A', R
probs = Statevector(qc).probabilities_dict()
ps.yk_from_counts({k: round(1e6 * v) for k, v in probs.items()})
# {'success': 0.25, 'fidelity': 1.0}: P F = 1/4
```

15.13. Resumen

- El decodificador de Yoshida–Kitaev es teleportación con posselección sobre el sector de Bell de un qubit radiado y su copia: un modelo de información, no de gravedad.
- En la escala del capítulo 1, el éxito $1/4$ es $m_P = -500$ y la fidelidad que certifica la recuperación, $F > 1/2$, es $m_F > 0$: decodificar es cruzar el ecuador.
- La ley exacta $PF = 1/4$ es una hipérbola en m-qg; con ruido, el éxito sigue en $1/4$ pero la fidelidad cae, y $4PF$ (0,57–0,73 en tres modelos simulados) mide la calidad del decodificador.
- Con un solo qubit radiado, un agujero negro genérico da $F \approx 0{,}57$; hacen falta 2 o 3 qubits radiados para $F \approx 0{,}84$–$0{,}95$.
- Un scrambler Clifford cuesta 35, 126 y 252 compuertas de dos qubits en 3, 5 y 7 qubits; con 7, la fidelidad en FakeFez sigue en 0,88 pero el éxito cae a 0,105 y $4PF$ a 0,37: el filtro conserva la calidad y cobra en tasa.
- qg_S no ve la curva de Page; la Rényi-2 desde los correladores qg sí, al costo de $4^k - 1$ lecturas.

Notas bibliográficas

La paradoja de la información parte de Hawking (1976); la complementariedad es Susskind et al. (1993), y la curva de Page, Page (1993). El protocolo de recuperación es Hayden y Preskill (2007), y su decodificador, Yoshida y Kitaev (2017). Los agujeros de gusano atravesables son Gao et al. (2017) y Maldacena et al. (2017), y ER = EPR, Maldacena y Susskind (2013); el experimento es Jafferis et al. (2022),

y la discusión de su interpretación, Kobrin et al. (2023). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte VI

VI. Ciberseguridad cuántica, generación aleatoria y fronteras post-cuánticas

16 Demarcación: criptografía cuántica frente a criptografía post-cuántica (PQC)

La Parte VI trata la seguridad. Antes de leer en qg la distribución de claves (capítulo 17) y los números aleatorios certificados (capítulo 18), conviene trazar la frontera. Hay dos respuestas a la computadora cuántica que comparten la palabra "cuántica" y casi nada más. La **criptografía cuántica** (QKD, QRNG) usa qubits: su seguridad descansa en una medición física, y por eso entra en la ecuación de probabilidad del capítulo 1. La **criptografía post-cuántica** (PQC) es software clásico que corre en computadoras comunes: su seguridad descansa en la dificultad de un problema matemático, y no hay qubit que leer. Este capítulo dice dónde pasa la línea, con números, y qué lee qang a cada lado.

16.1. Desde la base: qué probabilidades hay a cada lado

Cualquier probabilidad p_0 entra en la ecuación del capítulo 1: tiene ángulo qang $\theta = 2 \arccos \sqrt{p_0}$ y lectura $m = 1000(1 - 2p_1)$ m-qg. La pregunta no es si se puede escribir, sino si la lectura dice algo.

- **En QKD**, la probabilidad que decide la seguridad es la tasa de error de bit (QBER) de una medición en una base. Es la probabilidad de un qubit, y su lectura es la del capítulo 17: $Q = (1 - |qg|)/2$, es decir, $m = 1000\,|qg| = 1000(1 - 2Q)$.
- **En PQC**, la única probabilidad del esquema es la de que el descifrado falle, δ. Para ML-KEM, el estándar FIPS 203 la acota en $2^{-138,8}$, $2^{-164,8}$ y $2^{-174,8}$ para los tres niveles. Escrita en m-qg es $m = 1000 - 3{,}3 \times 10^{-39}$ en el mejor caso: está pegada al polo, y no hay operador hermítico, base de medición ni esfera de Bloch detrás de ese número.

La seguridad de la PQC, además, no es esa probabilidad: es la dificultad del problema de retículos (aprender con errores en módulos, MLWE), que no es una frecuencia de nada. Esa es la demarcación en una línea: **qang lee probabilidades de mediciones; la PQC no tiene mediciones**.

16.2. La naturaleza de la PQC

Los estándares del NIST de agosto de 2024 son tres: ML-KEM (FIPS 203, antes Kyber), un mecanismo de encapsulamiento de claves sobre retículos; ML-DSA (FIPS 204, antes Dilithium), firmas sobre retículos; y SLH-DSA (FIPS 205, antes SPHINCS+), firmas basadas sólo en funciones hash. En 2025 se eligió además HQC, basado en códigos correctores, como segundo mecanismo de claves. Todos son aritmética entera: polinomios módulo $q = 3329$ en ML-KEM, árboles de hash en SLH-DSA. Ninguno prepara un estado, aplica una compuerta ni mide.

En ML-KEM, descifrar es restar y redondear: el mensaje sobrevive si un ruido acumulado (la suma de muchos productos de coeficientes pequeños) queda dentro de $\pm q/4$. Si no, el descifrado falla. Esa es la δ de arriba.

16.3. La falla de descifrado se cuenta, no se mide en un qubit

Para ver qué haría qang con δ, el script de figuras construye un esquema de juguete con el mismo mecanismo: ruido $e = \sum_{i<2n} a_i b_i + c$ con a_i, b_i, c de la distribución binomial centrada de ML-KEM, $n = 256$, $q = 3329$, sin la compresión del estándar (que en ML-KEM es la mayor parte de la falla), y con el ancho η como perilla. La probabilidad de falla se calcula exacta (convolución módulo q) y se cuenta con 200 000 cifrados simulados.

Tabla 16.1: Falla de descifrado del esquema de juguete, exacta y contada.

η	σ/q	falla exacta	contada	lectura (m-qg, IC 95 %)
16	0,054	$5{,}1 \times 10^{-6}$	1 de 200 000	1000,0 [999,9; 1000,0]
20	0,068	$2{,}5 \times 10^{-4}$	60	999,4 [999,2; 999,5]
24	0,082	$2{,}2 \times 10^{-3}$	437	995,6 [995,2; 996,0]
32	0,109	$2{,}2 \times 10^{-2}$	4360	956,4 [955,1; 957,7]
40	0,136	$6{,}6 \times 10^{-2}$	13 072	869,3 [867,1; 871,4]

El conteo coincide con la cuenta exacta, y `qang.probability.analyze` lo lee en m-qg con su intervalo. Pero esa lectura es la proporción de Wilson con otra unidad: no hay ángulo de un estado detrás. Y donde vive la PQC real no llega ningún conteo (Figura 16.1, derecha). Para ver una sola falla de ML-KEM-512 hacen falta del orden de $1/\delta \approx 6 \times 10^{41}$ descifrados; con 10^{12} ensayos, lo más que se puede contar, el piso queda 30 órdenes de magnitud por encima. La regla de disparos del capítulo 1 dice lo mismo en m-qg: junto al polo, $\sigma_m \approx 2000\sqrt{\delta/N}$, y para que baje del corrimiento $2000\,\delta$ hace falta $N > 1/\delta$. **La δ de la PQC se demuestra, no se mide.**

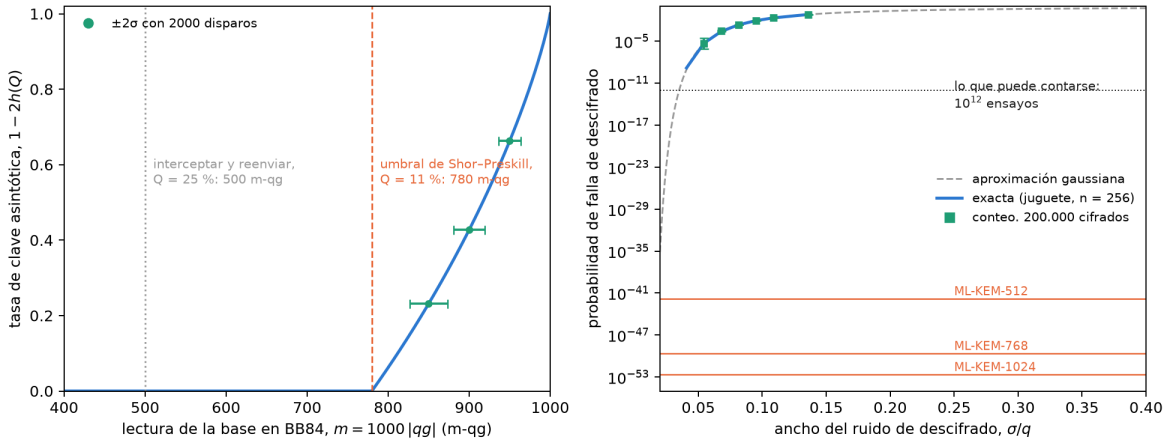


Figura 16.1: Izquierda: la frontera de seguridad de BB84 es una línea en m-qg; la tasa de clave asintótica de Shor–Preskill se anula en 780 m-qg (Q = 11 %), y con 2000 disparos la lectura tiene ±2σ de 14–24 m-qg. Derecha: la falla de descifrado de un esquema de juguete tipo ML-KEM (n = 256, sin compresión), exacta, gaussiana y contada; las líneas naranjas son las cotas de FIPS 203, 30 a 41 órdenes de magnitud por debajo de lo que puede contarse.

Del otro lado de la línea (Figura 16.1, izquierda), la cantidad que decide la seguridad de BB84 está en el centro de la escala. La tasa asintótica de Shor–Preskill, $1 - 2h(Q)$, se anula en $Q = 11{,}0\,\%$, que es $m = 780$ m-qg, un ángulo qang de $2\arcsin\sqrt{Q} = 0{,}676$ rad ($38{,}7°$, o 107,6 qga en la escala del capítulo 1); interceptar y reenviar da $Q = 25\,\%$, $m = 500$. Con 2000 disparos, σ_m es 11,8, 9,7 y 7,0 m-qg en 850, 900 y 950 m-qg: el margen hasta el umbral se resuelve con holgura. Es una probabilidad de un qubit, legible y con barra de error; el capítulo 17 la usa para separar al espía del ruido.

16.4. El vector de ataque cuántico: Grover

La computadora cuántica sí es cuántica, y sus ataques sí entran en la base. El de Grover contra una clave de n bits tiene probabilidad de fallar, después de k iteraciones,

$$p_{\text{falla}} = \cos^2\big((2k+1)\,\beta\big), \qquad \beta = \arcsin 2^{-n/2},$$

que es la ecuación de probabilidad con ángulo qang $2(2k+1)\beta$: **cada iteración avanza el ángulo qang en 4β, en línea recta**. Se comprobó con los circuitos de `qang.algorithms` para $n = 4$, 6, 8 y 10: el ángulo de la probabilidad exacta coincide con la ley a 10^{-10} rad (Figura 16.2). En m-qg, la falla baja de +1000 a −1000 siguiendo un coseno, y cruza el ecuador (éxito 1/2) a mitad de camino.

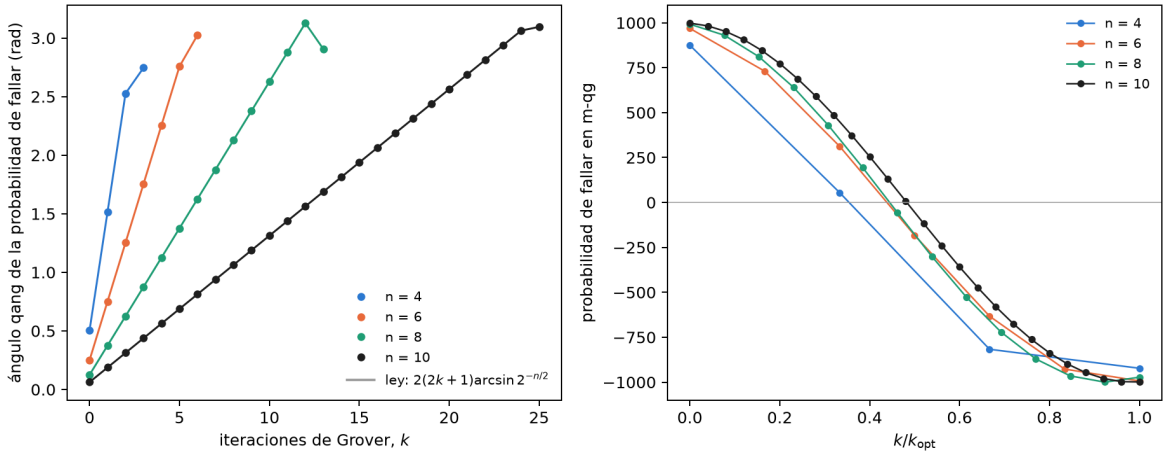


Figura 16.2: Izquierda: el ángulo qang de la probabilidad de que Grover falle crece linealmente con las iteraciones, $4\arcsin 2^{-n/2}$ por paso (puntos: circuitos exactos; líneas: la ley). Derecha: la misma probabilidad en m-qg frente a la fracción de las iteraciones óptimas.

Para AES-128 el paso es $4\arcsin 2^{-64} = 2{,}2 \times 10^{-19}$ rad por iteración, y llegar al polo exige $1{,}4 \times 10^{19}$ iteraciones en serie, cada una un circuito AES completo; para AES-256, $2{,}7 \times 10^{38}$. La respuesta de la PQC al ataque es duplicar el largo de la clave simétrica, y la geometría lo explica: el ángulo avanza como $2^{-n/2}$, de modo que Grover reduce a la mitad los bits de seguridad y nada más.

16.5. El vector de ataque cuántico: Shor y la estimación de fase

El ataque que rompe RSA y las curvas elípticas, y que la PQC esquiva, es el algoritmo de Shor: estimación de fase (QPE) sobre la multiplicación modular. Las notas (§13) muestran que la QPE recupera fases exactas, y el índice del libro decía que "el registro de autoestados proyecta a $qg_Z = -1$ sin resolver la fase". Eso es cierto para la QPE de un autoestado, y el cálculo exacto de este capítulo dice hasta dónde llega una lectura qg en el caso de Shor (Figura 16.3).

QPE de un autoestado. Con la compuerta T sobre $|1\rangle$ ($\varphi = 1/8$), el registro objetivo queda en $m_Z = -1000$ y no lleva información: la fase vive en el registro de conteo. Ahí, antes de la QFT inversa, el qubit k tiene $m_X = 1000\cos(2\pi 2^k\varphi)$: 707, 0 y -1000 m-qg. Cada qubit lleva un bit de la fase en su ángulo qang, que es la estimación de fase iterativa de Kitaev.

Shor para $N = 15$. El registro de trabajo no está en un autoestado sino en una superposición de los r autoestados, y los qubits de conteo quedan entrelazados con él. Con cuatro qubits de conteo, antes de la QFT inversa:

Tabla 16.2: Lecturas de un qubit del registro de conteo en el algoritmo de Shor (estado exacto).

caso	radio local de cada qubit de conteo, antes (m-qg)	m_Z de cada qubit, después	resultados
$a = 7$ ($r = 4$)	0, 0, 1000, 1000	1000, 1000, 0, 0	0, 4, 8, 12
$a = 11$ ($r = 2$)	0, 1000, 1000, 1000	1000, 1000, 1000, 0	0, 8
$N = 21$, $a = 2$ ($r = 6$), seis qubits	0, 0, 0, 0, 0, 0	0, 250, 312, 328, 332, 0	picos en 0, 11, 21, 32, 43, 53

Para $N = 15$ el orden se lee qubit por qubit: el número de qubits con radio cero antes de la QFT, o con $m_Z = 0$ después, es $\log_2 r$. Pero es un accidente de $N = 15$, donde r es potencia de 2. Con $N = 21$ y $r = 6$, todos los radios locales son cero y los m_Z de después no dicen 6: el orden está en la distribución conjunta, y se extrae con fracciones continuas. El registro de trabajo tampoco ayuda: para $a = 7$ sus qubits leen $m_Z = \pm 500$, la mezcla de 1, 7, 4 y 13.

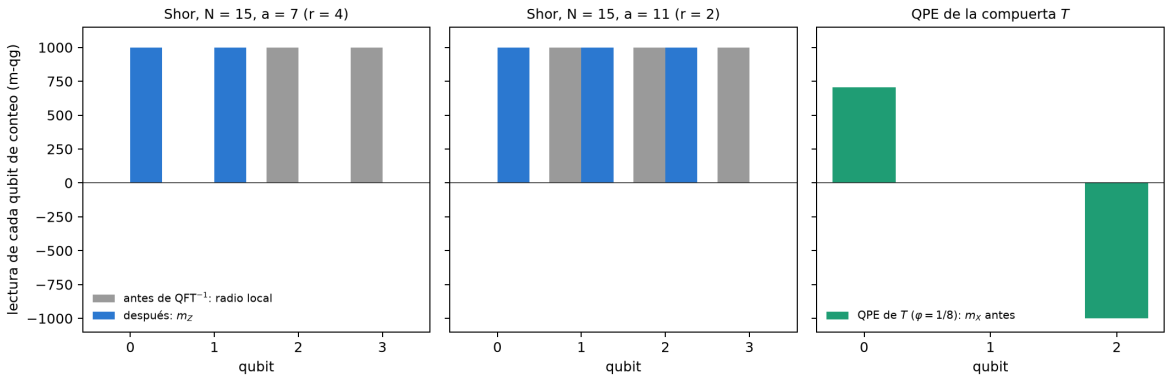


Figura 16.3: Lecturas de un qubit del registro de conteo. Gris: radio local antes de la QFT inversa; azul: m_Z después. Para N = 15 el número de ceros es $\log_2 r$; para la QPE de T, cada qubit lleva un bit de la fase en m_X.

La conclusión vale para todo el capítulo: las lecturas de un qubit ven la fase cuando hay un autoestado, y la pierden cuando la información está en las correlaciones. Es la limitación 3 de las notas (§14) en otra forma.

16.6. La demarcación

Tabla 16.3: Dónde pasa la línea.

	criptografía cuántica (QKD, QRNG)	criptografía post-cuántica (PQC)	ataque cuántico (Grover, Shor)
soporte	qubits, fotones	enteros, polinomios, hash	qubits
la seguridad descansa en	una medición física	la dificultad de MLWE, de códigos o del hash	—
la probabilidad clave	QBER, en el centro de la escala (780 m-qg)	$\delta \leq 2^{-138{,}8}$, pegada al polo	falla de Grover, éxito de Shor
¿la lee qang?	**sí**: capítulos 17 y 18	**no**: no hay qubit; δ sólo se cuenta, y no se puede	**en parte**: Grover sí; Shor sólo por qubit cuando hay autoestado

qang es una herramienta de capa física: lee lo que sale de una medición sobre un qubit. No dice nada sobre la dificultad de un retículo, y un módulo que pretendiera "medir en qg" la seguridad de ML-KEM sería un error de categoría.

16.7. Lo que queda pendiente

No existe un módulo `qang.crypto`, y este capítulo no propone uno. La criptografía del proyecto vive en `examples/` (`bb84_qg_eve_vs_noise.py`, `bb84_finite_key_qg.py`, `bb84_attacks_beyond_ir_qg.py`, `qrng_qg_certified.py`, `ionq_sim_bb84.py`, `ionq_sim_qrng.py`) y en `manuscript/crypto`. Quedan abiertas dos preguntas: si la lectura por qubit de la QPE iterativa (un qubit de conteo reciclado) ahorra disparos frente a la QPE con QFT cuando hay ruido, y una corrida de Shor para $N = 15$ en un dispositivo, leída por qubit; ninguna tiene todavía circuito ni predicción escrita.

16.8. Sin qang y con qang

Tabla 16.4: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
leer la seguridad de BB84	QBER y $1 - 2h(Q)$	umbral en 780 m-qg, σ_m 7–12 m-qg con 2000 disparos	**unidad**; el detalle está en el capítulo 17
estimar la falla de descifrado de la PQC	conteo con intervalo de Wilson	la misma proporción en m-qg	**ninguna**: es la misma estadística, y no hay estado detrás
la falla de ML-KEM	prueba matemática ($\leq 2^{-138,8}$)	$1000 - 3 \times 10^{-39}$ m-qg, sin resolución posible	**ninguna**; qang no se aplica
describir el ataque de Grover	$\sin^2((2k+1)\beta)$	el ángulo qang avanza 4β por iteración, en línea recta	**equivalente**: es la geometría estándar de Grover con otro nombre, aunque se lee de un vistazo

acción	sin qang	con qang	diferencia
leer la fase en la QPE de un autoestado	histograma del registro tras la QFT	m_X de cada qubit de conteo: un bit por qubit	**a favor**, modesto: la QPE iterativa leída en la escala del capítulo 1
leer el orden en Shor	fracciones continuas sobre el histograma	radios locales y m_Z por qubit	**en contra** salvo para r potencia de 2: con $N = 21$ todo lee cero

Balance. Este es el capítulo donde qang aporta menos, y su valor está en decirlo. Del lado de la PQC no hay nada que leer; del lado del ataque, Grover es una ecuación de probabilidad y se lee limpio, y Shor muestra el límite conocido de las lecturas de un qubit. Del lado cuántico, la QBER sí es una lectura qang, y los dos capítulos siguientes la usan.

16.9. En código

```
import math
from qang import algorithms as al
from qang import probability as pb

pb.milliqang_from_p0(1 - 0.11)              # 780: el umbral de BB84 en m-qg
pb.analyze(200_000 - 437, 200_000).milliqang    # (995.6, 995.2, 996.0): una falla contac
p = 1 - al.grover_success_probability(8, 1, 5)
math.acos(2 * p - 1)                    # 2(2*5+1) asin(2**-4) = 1.376: el ángulo de Grove
```

16.10. Resumen

- La criptografía cuántica tiene mediciones y entra en la ecuación de probabilidad; la PQC es aritmética clásica y no.
- La seguridad de BB84 es una línea en m-qg: la tasa de clave se anula en 780 m-qg, en el centro de la escala.
- La única probabilidad de ML-KEM, la falla de descifrado, está a 3×10^{-39} m-qg del polo: se demuestra, no se mide; contarla es imposible, y leerla en m-qg es la misma proporción con otra unidad.

- El ataque de Grover avanza el ángulo qang $4 \arcsin 2^{-n/2}$ por iteración, en línea recta; de ahí que duplicar la clave baste.
- En la QPE de un autoestado cada qubit de conteo lleva un bit de la fase en m_X; en Shor la información está en las correlaciones, y las lecturas de un qubit sólo ven el orden cuando es potencia de 2.

Notas bibliográficas

Los estándares post-cuánticos son FIPS 203, 204 y 205 (National Institute of Standards and Technology 2024b, 2024a, 2024c), y la selección de HQC está en Alagic et al. (2025). Los vectores de ataque cuántico son Grover (Grover 1996) y Shor (Shor 1997), este último sobre la estimación de fase de Kitaev (1995). BB84 es Bennett y Brassard (2014) (reimpresión del original de 1984). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

17 Distribución cuántica de claves (QKD) y BB84 en espacio qg

El capítulo 16 dejó la QBER de BB84 del lado de lo que qang lee: es la probabilidad de un qubit, y el umbral de seguridad está en el centro de la escala, en 780 m-qg. Este capítulo la abre. La QBER es un solo número, y un enlace real tiene cuatro: cada estado que Alice envía llega a Bob con su propia probabilidad de error. En la escala del capítulo 1 esas cuatro lecturas dicen dónde quedó la imagen de la esfera de Bloch después del canal, y la forma de esa imagen distingue dos causas que la QBER confunde: una memoria que se degrada y un espía que intercepta. El capítulo dice hasta dónde llega esa distinción, con bloques de clave finitos, con ataques más finos y con el ruido de iones atrapados, y dónde no llega.

17.1. Desde la base: cuatro lecturas y la imagen de la esfera

En BB84 Alice envía $|0\rangle$ o $|1\rangle$ (base Z) o $|+\rangle$ o $|-\rangle$ (base X); el qubit espera en una memoria o viaja por un canal, y Bob mide. Después del cribado sólo quedan las rondas en que Bob midió en la base de Alice. Para cada estado enviado, la lectura de Bob en su propia base es una lectura del capítulo 1:

$$m(0) = 1000\,(1 - 2e_{0\to1}), \qquad m(1) = -1000\,(1 - 2e_{1\to0}),$$

y lo mismo para $|\pm\rangle$ en X. Un canal ideal da ±1000. Un canal real lleva la esfera a un elipsoide, y en cada base las dos lecturas dan su **centro** y su **semieje**:

$$c_Z = \frac{m(0) + m(1)}{2}, \qquad r_Z = \frac{m(0) - m(1)}{2}, \qquad Q_Z = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{r_Z}{1000}\Big).$$

La QBER es exactamente el semieje, sin aproximación. La fórmula del índice, $Q = (1 - |qg|)/2$, es el caso simétrico, en que las dos lecturas de una base tienen el mismo módulo; en general $|m(0)| \neq |m(1)|$, y la diferencia es el centro. La

asimetría $A_Z = qg(0) + qg(1)$ de las notas (§40) es $2c_Z$: el testigo de T1 del §24.

Las dos causas mueven la imagen en direcciones distintas. La relajación T1 de la memoria es afín, $z \mapsto (1-\gamma)z + \gamma$: deja $|0\rangle$ en el polo y levanta $|1\rangle$, de modo que c_Z sube y r_Z baja **en la misma cantidad**. Un espía que intercepta y reenvía una fracción f de los qubits, midiendo en una base al azar, encoge la esfera antes de la memoria: r_Z baja y c_Z **no se mueve**, exactamente, porque la memoria afín pone el centro en un lugar que sólo depende de γ. En el plano (c_Z, r_Z) la deriva es una recta de pendiente -1 y el espía una vertical (Figura 17.1, izquierda).

El canal de las notas: memoria con $\gamma_0 = 0{,}02$ (T1), desfase $p_0 = 0{,}01$ y detector asimétrico ($e_{01} = 0{,}005$, $e_{10} = 0{,}01$, calibrado como en el §31).

Tabla 17.1: Las cuatro lecturas de BB84 en m-qg (el centro y el semieje en X: $c_X = 5{,}0$ en todos los casos, por el detector). La fracción secreta es la asintótica de Shor–Preskill, $1 - h(Q_Z) - h(Q_X)$.

escenario	$m(0)$	$m(1)$	c_Z	r_Z	r_X	Q_Z	Q_X	fracción secreta
línea de base	990,0	−940,6	24,7	965,3	955,6	1,74 %	2,22 %	0,720
deriva T1, $\gamma = 0{,}04$	990,0	−901,2	44,4	945,6	945,8	2,72 %	2,71 %	0,640
deriva T1, $\gamma = 0{,}06$	990,0	−861,8	64,1	925,9	935,9	3,70 %	3,21 %	0,567
intercepta y reenviar, $f = 0{,}05$	965,9	−916,5	24,7	941,2	931,7	2,94 %	3,41 %	0,594
intercepta y reenviar, $f = 0{,}10$	941,7	−892,3	24,7	917,0	907,8	4,15 %	4,61 %	0,481

En una ventana de N bits comparados, $N/4$ por estado, el ruido de disparo de c_Z y de r_Z es 16,4, 8,2 y 3,7 m-qg para $N = 500$, 2000 y 10 000. Que la memoria pase de $\gamma = 0{,}02$ a $0{,}04$ mueve el centro 19,7 m-qg: con 2000 bits, 2,4 desviaciones.

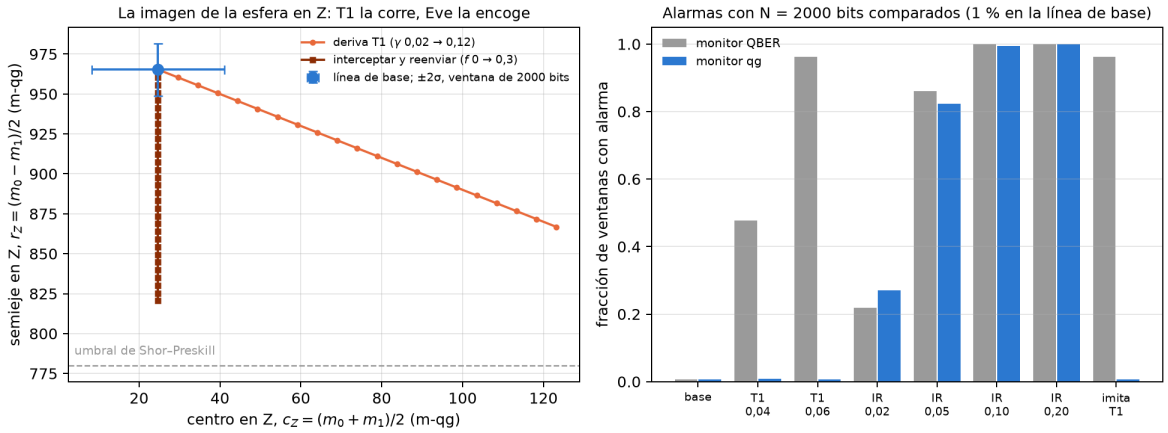


Figura 17.1: Izquierda: la imagen de la esfera en la base Z, centro frente a semieje (m-qg). La deriva T1 recorre una recta de pendiente −1; interceptar y reenviar baja el semieje sin mover el centro; la barra es ±2σ con una ventana de 2000 bits. Derecha: alarmas de los dos monitores con N = 2000 bits comparados, ajustados a 1 % de falsas alarmas en la línea de base.

17.2. El monitor: deriva o espía

Las notas (§40) comparan dos monitores sobre ventanas de N bits cribados y comparados, los dos ajustados a 1 % de falsas alarmas en la línea de base:

- **monitor QBER**: una prueba de una cola sobre el número total de errores;
- **monitor qg**: una razón de verosimilitud generalizada sobre los cuatro conteos de error, donde "ataque" ($f > 0$) tiene que ganarle a la vez a "línea de base" y a "deriva T1" (γ libre).

Tabla 17.2: Fracción de ventanas con alarma (1000 ventanas por escenario).

escenario	QBER, $N = 500$	qg, $N = 500$	QBER, $N = 2000$	qg, $N = 2000$	QBER, $N = 10^4$	qg, $N = 10^4$
línea de base	0,007	0,004	0,007	0,006	0,010	0,007
deriva T1, 0,04	0,147	0,009	0,478	**0,009**	0,992	0,000
deriva T1, 0,06	0,463	0,009	0,962	**0,006**	1,000	0,000
interceptar, $f = 0{,}02$	0,072	0,065	0,218	0,271	0,847	0,848
interceptar, $f = 0{,}05$	0,337	0,338	0,861	0,823	1,000	1,000
interceptar, $f = 0{,}10$	0,821	0,730	1,000	0,994	1,000	1,000
ataque que imita T1	0,463	0,009	**0,962**	0,006	1,000	0,000

Tres cosas se leen en la tabla.

- **La detección es la misma; las falsas alarmas no.** El monitor qg detecta al espía ingenuo tan bien como el de QBER, en cada N y cada f, dentro de la dispersión del muestreo. Cuando la memoria se degrada, el de QBER salta en 48 % y 96 % de las ventanas ($N = 2000$) y el qg se queda en 0,9 % y 0,6 %, al nivel de la línea de base. La reducción de falsas alarmas vale para la deriva T1, que es la que el monitor qg tiene en su modelo, y no para cualquier degradación.
- **El precio, por diseño.** Un espía que acopla el qubit a su ancila con una interacción de amortiguamiento produce exactamente los conteos de una deriva T1, porque en el plano (c_Z, r_Z) recorre la misma recta. El monitor qg no lo ve (0,6 %, la misma cifra que la deriva, porque los conteos son idénticos), y el de QBER sí (96 %). Los dos son complementarios: QBER dice "algo cambió"; qg dice "simétrico (como un ataque)" o "como T1 (deriva, o un espía que se esconde en ella)".
- **No hay ganancia de seguridad.** La fracción secreta cae igual en los dos casos (0,720 → 0,567 con la deriva a 0,06; 0,720 → 0,594 con $f = 0{,}05$). Una prueba de seguridad tiene que atribuir todo error a Eve, y la lectura qg no cambia eso.

El escenario es el de un enlace con qubits de materia, o una demostración en un chip, donde el qubit espera con T1 y T2 antes de que Bob mida. En un enlace de polarización de fotones el ruido es casi unital, el centro no se mueve, y la distinción no existe.

17.3. Bloques finitos

Un enlace real corta la clave en bloques. Las notas (§43) usan la cota de clave finita de Tomamichel et al. (2012) sobre el mismo canal:

$$\ell = n\big[1 - h(Q_{\mathrm{tol}} + \mu)\big] - 1{,}1\, n\, h(Q_Z) - \log_2 \frac{2}{\varepsilon_{\mathrm{sec}}^2 \varepsilon_{\mathrm{cor}}}, \qquad \mu = \sqrt{\frac{n+k}{nk}\,\frac{k+1}{k}\,\ln\frac{2}{\varepsilon_{\mathrm{sec}}}},$$

con $\varepsilon = 10^{-10}$, n bits de clave en Z y k bits de prueba en X. El protocolo aborta si el error de prueba supera Q_{tol}; k y Q_{tol} se optimizan para cada n.

Tabla 17.3: Bits secretos por señal con clave finita.

escenario	n mínimo	$n = 10^4$	10^5	10^6	10^7	asintótica
línea de base	$1{,}2 \cdot 10^3$	0,120	0,268	0,407	0,516	0,707
deriva T1, 0,04	$1{,}6 \cdot 10^3$	0,091	0,223	0,348	0,446	0,622
deriva T1, 0,06	$2{,}0 \cdot 10^3$	0,068	0,182	0,294	0,383	0,544
interceptar, $f = 0{,}05$	$1{,}7 \cdot 10^3$	0,079	0,201	0,318	0,410	0,575

Un bloque de 10^4 bits conserva el 17 % de la tasa asintótica; 10^5, el 38 %; 10^6, el 58 %; 10^7, el 73 %. Por debajo de unos 10^3 bits no hay clave. La deriva y el ataque cuestan clave por igual.

Dónde entra qg, sin costo de clave. Después de la corrección de errores y su verificación, Bob conoce los bits de Alice: tiene los cuatro conteos de error, es decir las cuatro lecturas, sobre los n bits de clave, sin revelar nada. Anunciar un bit de alarma cuesta a lo sumo un bit de clave, y los bits de un bloque abortado se descartan igual. Dos razones de verosimilitud anidadas sobre el modelo conjunto

(γ y f libres) dan una bandera “tipo ataque” (error simétrico más allá de cualquier T1) y una “tipo deriva” (T1 más allá de la línea de base, haya o no ataque), cada una con 1 % de falsas alarmas.

Con el protocolo ajustado en la línea de base para $n = 10^5$ ($k = 7609$, $Q_{\text{tol}} = 2{,}67$ %, es decir, abortar si el semieje en X baja de 946,6 m-qg), 400 bloques por escenario:

Tabla 17.4: Abortos del protocolo y diagnóstico qg de los mismos bloques ($n = 10^5$).

escenario	el protocolo aborta	qg: tipo ataque	qg: tipo deriva
línea de base	0,010	0,020	0,015
deriva T1, 0,03	0,100	0,005	**1,000**
deriva T1, 0,04	0,557	0,005	**1,000**
deriva T1, 0,06	0,995	0,007	**1,000**
interceptar, $f = 0{,}02$	0,495	**1,000**	0,043
interceptar, $f = 0{,}05$	1,000	**1,000**	0,040
deriva 0,04 + interceptar 0,02	0,995	**1,000**	**1,000**
ataque que imita T1	0,995	0,013	1,000

- **Un aborto no dice por qué; qg sí.** Con 10^5 bits de clave la atribución es casi exacta: todo bloque con deriva, abortado o no, sale como deriva y no como ataque, y todo bloque interceptado sale como ataque, incluida la mitad que no abortó. Con $n = 10^4$ las banderas ya están en 0,97–1,00 (0,81 para la deriva 0,03).
- **Un ataque escondido bajo la deriva se ve.** Interceptar con $f = 0{,}02$ sobre una memoria con $\gamma = 0{,}04$ levanta las dos banderas en todos los bloques. La prueba de un parámetro de la sección anterior no lo ve: da 0,5 % de banderas de ataque y llama “deriva” al 99 %. El modelo conjunto arregla una debilidad real del §40.
- **Aviso temprano.** Con $\gamma = 0{,}03$ sólo aborta el 10 % de los bloques, pero la bandera de deriva está arriba en todos: la memoria se puede reparar antes de que el enlace se detenga. Una tendencia de Q_Z también avisaría; lo que agrega qg es la atribución.

17.4. Más allá de interceptar y reenviar

Las banderas conocen dos familias de error. Visto desde Bob, todo ataque individual es un canal de Pauli (p_x, p_y, p_z), y en la imagen de la esfera un canal de Pauli **encoge los ejes sin mover el centro**: el semieje en Z se multiplica por

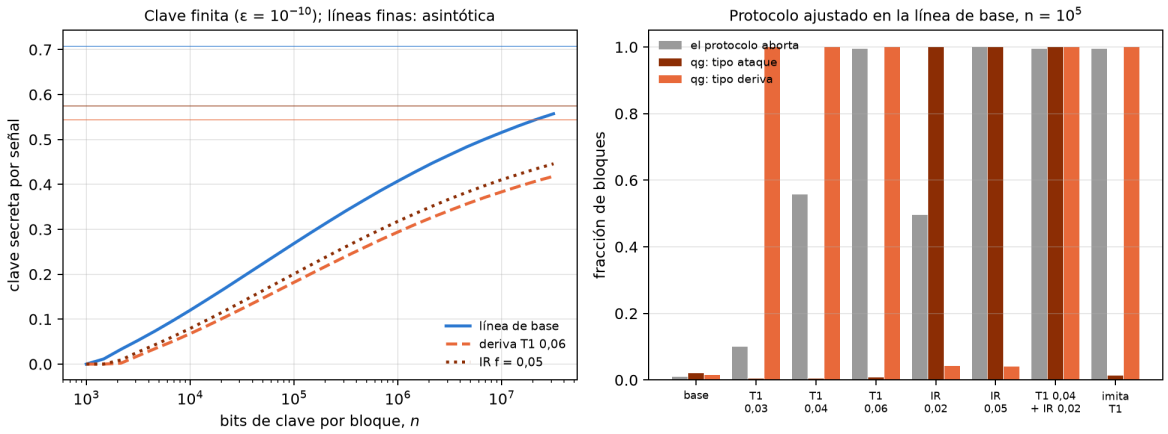


Figura 17.2: Izquierda: tasa de clave finita frente al tamaño del bloque para la línea de base, la deriva T1 a 0,06 y un espía con f = 0,05; las líneas finas son las tasas asintóticas. Derecha: con n = 10^5, qué fracción de bloques aborta y qué fracción levanta cada bandera qg.

$1 - 2(p_x + p_y)$ y el de X por $1 - 2(p_z + p_y)$. Eso explica la tabla de las notas (§49):

Tabla 17.5: Ataques individuales como canales de Pauli. Las identidades se cumplen a 10^{-16}.

ataque	(p_x, p_y, p_z)	qué encoge	mismos conteos que
interceptar en las dos bases, fracción f	$(f/4, 0, f/4)$	Z y X	—
clonador óptimo de fase covariante, perturbación D	$(0, D, 0)$	Z y X	interceptar con $f = 4D$
interceptar sólo en Z, fracción f	$(0, 0, f/2)$	sólo X	**deriva T2**, $(1 - 2p') = (1 - 2p_0)(1 - f)$
interceptar sólo en X, fracción f	$(f/2, 0, 0)$	sólo Z	ningún ruido natural

El desfase T2 también encoge sólo el eje X. De ahí la tercera familia: con $n = 10^5$, $k = 7609$ y 400 bloques, el modelo agrega una familia de desfase y tres banderas anidadas de una cola: tipo ataque, tipo T1 ($\gamma > \gamma_0$) y tipo T2 ($p > p_0$).

Tabla 17.6: Banderas con tres familias de error ($n = 10^5$, 400 bloques).

escenario	tipo ataque	tipo T1	tipo T2	modelo de dos familias: ataque
línea de base	0,020	0,005	0,033	0,020
deriva T1, 0,04	0,018	**1,00**	0,033	0,015
deriva T2, $p = 0{,}02$ / $0{,}03$	0,007 / 0,020	0,01	**1,00**	**0,075 / 0,268**
interceptar, $f = 0{,}05$	**1,00**	0,055	0,028	1,00
clonador, $D = 0{,}0125$ / $0{,}025$	**1,00**	0,055	0,02–0,04	1,00
sólo Z, $f = 0{,}02$ / $0{,}04$	0,013	0,02–0,03	**1,00**	0,06 / 0,27
sólo X, $f = 0{,}04$	**1,00**	0,048	0,000	1,00
deriva T2 + clonador	**1,00**	0,043	**0,995**	1,00

- **La clonación parcial se ve.** El clonador óptimo sale como ataque en todos los bloques, igual que interceptar con $f = 4D$, porque Bob ve los mismos conteos. Lo que ninguna estadística de errores muestra es que el clonador le da a Eve más información por error; la tasa de clave, que carga todo error a Eve, ya lo cuenta.
- **El modelo de dos familias tenía una falsa alarma.** Sin la familia de desfase, la deriva T2 levantaba la bandera de ataque en 7,5 % y 27 % de los bloques. Con la familia, la falsa alarma baja a 0,7–2 % y el veredicto es T2 en todos.
- **Un segundo punto ciego, por construcción.** Interceptar sólo en Z encoge sólo el eje X, igual que T2: sale como deriva T2 y no como ataque. Es el gemelo del ataque que imita T1: un espía que se esconde en el tipo de error que el hardware produce solo. Interceptar sólo en X no tiene gemelo natural, y se ve siempre.
- **Las mezclas se separan:** deriva T2 más un clonador levanta las dos banderas.

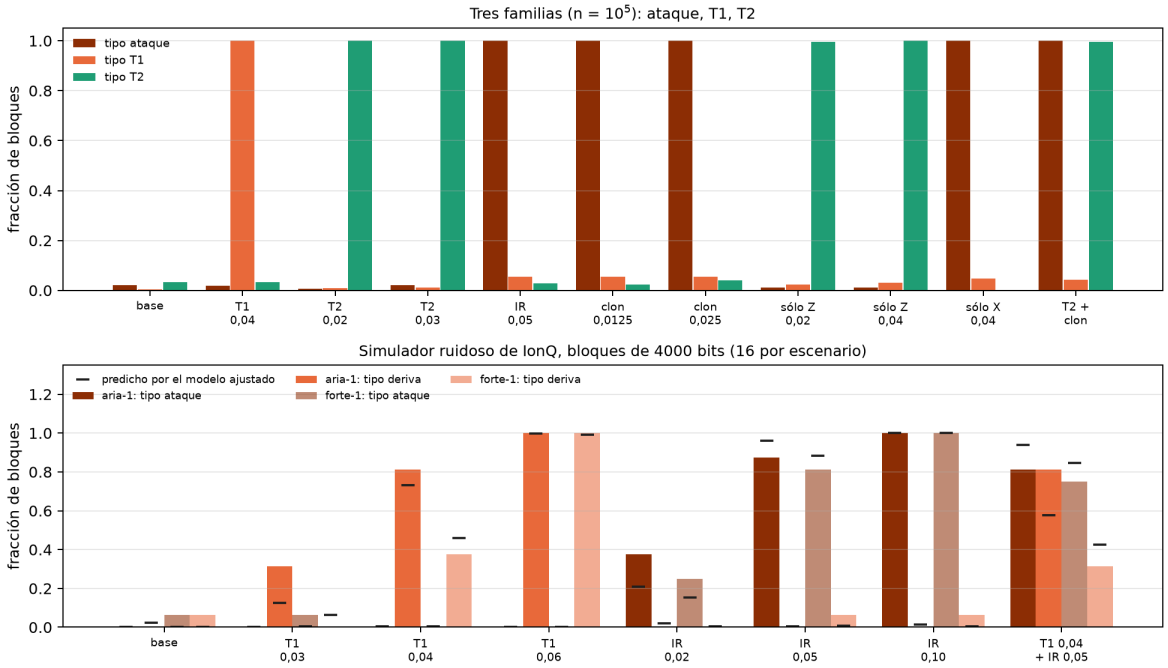


Figura 17.3: Arriba: banderas del modelo de tres familias con n = 10^5. La deriva T2 y la intercepción sólo en Z reciben el mismo veredicto, porque encogen el mismo eje. Abajo: banderas sobre el simulador ruidoso de IonQ (aria-1 y forte-1), observadas en 16 bloques de 4000 bits; las marcas negras son lo que predice el modelo ajustado.

17.5. En el simulador ruidoso de IonQ

Hasta aquí el canal era analítico. En las notas (§44) cada pieza de BB84 es un circuito corrido en los modelos de ruido aria-1 y forte-1 del simulador de IonQ (gratuito; nada se envió a una QPU), y el modelo detrás de las banderas se ajusta, no se da.

- **La memoria** es un amortiguamiento construido con una ancila, CRY$(2 \arcsin \sqrt{\gamma})$ seguido de CX, con $\gamma_0 = 0{,}02$ sana y derivas de 0,03 a 0,06.
- **Eve** mide y reenvía (CX hacia su ancila en Z, H·CX·H en X), sin leer nunca la ancila; una fracción f de las rondas se toma de esos circuitos.
- **Las corridas:** 32 circuitos en compuertas nativas, 4 copias de cada uno (12 qubits), 2000 disparos, 4 repeticiones por modelo de ruido. Cada copia es un bloque de $n = k = 4000$ bits.
- **El modelo de las banderas** es el conjunto (γ, f) más dos tasas simétricas de inversión del dispositivo, ε_Z y ε_X, ajustado dejando fuera cada repetición, con umbrales de un bootstrap paramétrico al 1 %.

El dispositivo agrega un error casi simétrico de 2,3–2,4 % por bit (aria-1) y 2,8–3,1 % (forte-1), sobre todo de las dos compuertas MS del circuito de memoria. En la imagen de la esfera eso es un encogimiento, no un corrimiento. La memoria sana diseñada da $c_Z = 20$, $r_Z = 980$ y $r_X = 990$ m-qg; el simulador da $c_Z = 18{,}5$ y $20{,}6$ m-qg (aria-1, forte-1), con los semiejes 46–62 m-qg más abajo; con $\gamma = 0{,}06$ el centro sube a 60,5 y 56,5 m-qg, donde el diseño dice 60. El ruido del dispositivo deja el centro en su lugar, que es lo que hace falta para que el testigo de T1 siga funcionando. El ajuste recupera la γ_0 diseñada (0,020–0,0225) en todos los pliegues.

Tabla 17.7: Banderas en el simulador de IonQ, observadas / predichas por el modelo ajustado (16 bloques por escenario).

escenario	aria-1 QBER	aria-1 ataque	aria-1 deriva	forte-1 QBER	forte-1 ataque	forte-1 deriva
línea de base	0,00/0,01	0,00/0,00	0,00/0,02	0,00/0,01	0,06/0,00	0,06/0,00
deriva 0,03	0,56/0,36	0,00/0,00	0,31/0,12	0,06/0,20	0,06/0,01	0,00/0,06
deriva 0,04	0,94/0,93	0,00/0,01	0,81/0,73	0,38/0,75	0,00/0,01	0,38/0,46
deriva 0,06	1,00/1,00	0,00/0,00	**1,00**/1,00	1,00/1,00	0,00/0,00	**1,00**/0,99

escenario	aria-1 QBER	aria-1 ataque	aria-1 deriva	forte-1 QBER	forte-1 ataque	forte-1 deriva
interceptar, $f = 0{,}02$	0,62/0,58	0,38/0,21	0,00/0,02	0,31/0,38	0,25/0,15	0,00/0,01
interceptar, $f = 0{,}05$	1,00/1,00	**0,88**/0,96	0,00/0,01	1,00/0,99	**0,81**/0,88	0,06/0,01
interceptar, $f = 0{,}10$	1,00/1,00	**1,00**/1,00	0,00/0,01	1,00/1,00	**1,00**/1,00	0,06/0,01
deriva 0,04 + $f = 0{,}05$	1,00/1,00	0,81/0,94	0,81/0,58	1,00/1,00	0,75/0,84	0,31/0,42

- **La atribución se transfiere.** Una memoria con deriva nunca se toma por un ataque en aria-1 (0 de 48 bloques), y una vez en 48 en forte-1. Un ataque se toma por deriva en a lo sumo 1 de 16 bloques. Los cambios grandes (deriva 0,06, $f = 0{,}10$) se atribuyen en todos los bloques.
- **Bloques chicos, dispositivo ruidoso.** Con 4000 bits y 2–3 % de ruido propio, los cambios chicos se ven en parte: 31–81 % para la deriva 0,03–0,04 y 81–88 % para $f = 0{,}05$. El monitor de QBER ve los cambios tanto o más seguido, pero no dice de qué tipo son.
- **El modelo predice qué bandera sube.** Casi todas las tasas observadas caen dentro de la dispersión de ±0,12 de 16 bloques; los mayores desvíos están cerca del umbral. Extrapolado con el ruido ajustado a $n = 10^5$, el régimen de la sección de bloques finitos, cada escenario se atribuye bien en 99–100 % de los bloques.

Son modelos de ruido del fabricante en un simulador, no hardware; la memoria y el ataque son circuitos diseñados.

17.6. Lo que queda pendiente

No hay corrida en hardware: el plan de Forte-1 (notas, §46) fue rechazado por el proveedor antes de aceptar el trabajo, y los créditos de IQM disponibles no alcanzan para bloques de 10^5 bits. Quedan sin modelar los ataques colectivos y los ataques al detector, y los enlaces de fotones, donde el ruido no mueve el centro. Tampoco hay un módulo `qang.crypto` (capítulo 16): todo vive en `examples/bb84_*.py` y `examples/ionq_sim_bb84.py`.

17.7. Sin qang y con qang

Tabla 17.8: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
decidir si hay clave	QBER y $1 - h(Q_Z) - h(Q_X)$, o la cota de clave finita	el semieje r en m-qg; abortar si $r_X < 946{,}6$	**unidad**: es la misma cuenta
describir el canal	cuatro tasas de error	centro y semieje de la imagen de la esfera en cada base	**a favor**, modesto: T1 corre el centro, el espía encoge, T2 encoge sólo X; la geometría dice qué modelo hace falta
distinguir deriva de espía	QBER total: no puede	razón de verosimilitud sobre los cuatro conteos	**a favor**, pero la ganancia es del modelo de verosimilitud sobre los conteos por estado; un análisis asimétrico estándar haría lo mismo sin la palabra qg
falsas alarmas por deriva T1 ($N = 2000$)	48 % y 96 %	0,9 % y 0,6 %	**a favor**, con el precio: el ataque que imita T1 pasa (0,6 % frente a 96 %)
seguridad	toda falla se carga a Eve	igual	**ninguna**: la clave no crece
ataque escondido bajo deriva	sólo un aborto	las dos banderas, 100 % de los bloques ($n = 10^5$)	**a favor** del modelo conjunto
ruido de un dispositivo real (simulado)	QBER salta con todo	atribución 0–1 errores en 48 bloques	**a favor**, con bloques de 4000 bits todavía parcial

Balance. La contribución propia de la base del capítulo 1 es la geometría: leer las cuatro probabilidades como el centro y los semiejes de la imagen de la esfera dice de entrada qué familias de error se distinguen (las que mueven cosas distintas) y cuáles no (las que encogen el mismo eje). El poder de detección viene de la estadística sobre los conteos por estado, que no necesita a qang. Y la seguridad no cambia: este es un diagnóstico operativo, no una prueba.

17.8. En código

```
import sys
sys.path.insert(0, "examples")
import bb84_qg_eve_vs_noise as B

e = B.error_probabilities(gamma=0.04)      # tasas de error de 0, 1, +, -
m = 1000 * B.qg_per_state(e)            # [990.0, -901.2, 950.8, -940.8] m-qg
c_z, r_z = (m[0] + m[1]) / 2, (m[0] - m[1]) / 2
c_z, r_z, (1 - r_z / 1000) / 2              # 44.4, 945.6 y Q_Z = 0.0272
```

17.9. Resumen

- En BB84 cada estado enviado tiene su lectura; en cada base, las dos lecturas dan el centro y el semieje de la imagen de la esfera, y la QBER es exactamente el semieje: $Q = (1 - r/1000)/2$.
- La deriva T1 corre el centro y encoge en la misma cantidad; un espía que intercepta encoge sin mover el centro. De ahí que el monitor qg calle ante la deriva (0,6–0,9 % frente a 48–96 %) y vea al espía igual que la QBER.
- Por construcción, un espía que imita T1, o que intercepta sólo en Z (y se parece a T2), sale como deriva.
- Con bloques finitos de 10^5 bits la atribución es casi exacta, sin costo de clave, y un ataque escondido bajo una deriva levanta las dos banderas; el simulador de IonQ lo confirma con bloques de 4000 bits, en parte.
- La clave secreta no crece: la lectura qg es un diagnóstico, no seguridad.

Notas bibliográficas

El protocolo BB84 es Bennett y Brassard (2014) (reimpresión del original de 1984), y la prueba de seguridad que liga la QBER con la clave, Shor y Preskill (2000). La cota de clave finita es Tomamichel et al. (2012). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

18 Números aleatorios certificados (QRNG) y auditoría de canales

Un generador cuántico de números aleatorios (QRNG) de un qubit es el experimento más simple del libro: preparar $|+\rangle$, medir en Z, anotar el bit. El resultado es una moneda justa, y eso es lo que mide el análisis habitual. Pero una moneda justa no es lo mismo que una moneda privada. Si el qubit perdió coherencia, la salida sigue saliendo 50/50, y sin embargo alguien que tenga el entorno puede conocer cada bit de antemano. Este capítulo lee esa diferencia en la escala del capítulo 1. La salida vive en una lectura y la privacidad en las otras dos, y lo que sabe el adversario es una lectura más, la que le falta al estado para llegar a la esfera. El capítulo agrega la calibración de lectura que hace falta para no sobrestimar, y el mismo certificador frente a una fuga diseñada en el simulador de IonQ.

18.1. Desde la base: la salida y la privacidad son lecturas distintas

El qubit de la fuente tiene tres lecturas, m_X, m_Y y m_Z. La salida del QRNG es la medición en Z, y el análisis habitual sólo mira su sesgo: con $p_0 = (1000 + m_Z)/2000$ certifica

$$H_{\text{ingenuo}} = -\log_2 \max(p_0, p_1) = -\log_2 \frac{1000 + |m_Z|}{2000}$$

bits por disparo, 1 bit cuando $m_Z = 0$. Pero $m_Z = 0$ lo da tanto $|+\rangle$ como el estado completamente mezclado, y en el segundo caso no hay nada privado: el entorno guarda la otra mitad de la purificación y sabe qué salió.

Con la medición de confianza y un adversario (Eve) que tiene la purificación, los dos estados condicionales de Eve son puros y su solapamiento depende sólo del radio transversal $r_\perp = \sqrt{q g_X^2 + q g_Y^2}$. Por Helstrom, su probabilidad de adivinar es (notas, §41)

$$P_{\text{adivinar}} = \frac{1 + \sqrt{1 - r_\perp^2}}{2}, \qquad H_{\text{mín}}(Z|E) = -\log_2 P_{\text{adivinar}}.$$

En la escala del capítulo 1, esa probabilidad es una lectura más. Su valor en m-qg es

$$m_E = 1000\sqrt{1 - r_\perp^2} = \sqrt{1000^2 - m_X^2 - m_Y^2},$$

lo que le falta al radio transversal para llegar a la esfera, y su ángulo qang es $\arcsin r_\perp$. La fórmula no depende de m_Z. Un estado puro en el ecuador tiene $m_\perp = 1000$ y deja a Eve en $m_E = 0$: adivina con probabilidad 1/2, y el bit es privado. Un estado que perdió coherencia tiene $m_\perp < 1000$, y la longitud que perdió es lo que sabe Eve (Figura 18.1, izquierda).

Tabla 18.1: La aleatoriedad privada de un qubit medido en Z, en función de su radio transversal.

$m_\perp$ (m-qg)	1000	990	950	900	800	500	200
lo que sabe Eve, m_E (m-qg)	0	141	312	436	600	866	980
bits privados por disparo	1,000	0,810	0,608	0,478	0,322	0,100	0,015

La forma de la fórmula tiene una consecuencia práctica. Diez m-qg menos de radio transversal, de 1000 a 990, le dan a Eve 141 m-qg y le quitan a la fuente 0,19 bits por disparo. Es el polo del capítulo 1 visto desde el otro lado: cerca de $m_\perp = 1000$, la raíz tiene pendiente infinita.

18.2. El análisis por sesgo de salida falla; la lectura qg no

El certificador qg estima m_X y m_Y con rondas de prueba (giros que llevan X e Y a la base de medición) y usa una cota inferior de $r_\perp$ a 3σ. Las notas (§41)

comparan cuatro estimadores con 10^4 rondas de prueba por ajuste, 300 corridas por escenario y la lectura asimétrica del §31 ($e_{01} = 0{,}015$, $e_{10} = 0{,}04$):

- **ingenuo**: el sesgo de la salida;
- **qg, un solo giro**: m_X y m_Y medidos con una rotación cada uno;
- **qg, pares ±**: cada eje con las dos rotaciones, de modo que el corrimiento de la lectura se cancela;
- **qg calibrado**: los pares ±, divididos por el factor de escala b de la lectura medido con el protocolo del §31.

Tabla 18.2: Bits certificados por disparo: estimación media y, entre paréntesis, la fracción de corridas por encima de la verdad (inseguras).

escenario	$m_\perp$	verdad	ingenuo	qg, un giro	qg, pares ±	**qg calibrado**
$\lvert+\rangle$ ideal	1000	1,000	0,965 (0)	0,578 (0)	0,512 (0)	0,681 (0)
T2: $V = 0{,}8$	800	0,322	0,964 (**1,00**)	0,269 (0)	0,245 (0)	**0,286 (0)**
T2: $V = 0{,}5$	500	0,100	0,965 (**1,00**)	0,087 (0)	0,077 (0)	**0,087 (0)**
T2: $V = 0{,}2$	200	0,015	0,965 (**1,00**)	0,013 (**0,07**)	0,009 (0)	**0,010 (0)**
térmico $p = 0{,}05$, $V = 0{,}9$	810	0,334	0,965 (**1,00**)	0,279 (0)	0,254 (0)	**0,297 (0)**
lectura muy asimétrica, $e_{10} = 0{,}10$, $V = 0{,}95$	950	0,608	0,876 (**1,00**)	0,498 (0)	0,341 (0)	**0,513 (0)**

- **El estimador habitual es inseguro siempre que el estado no sea puro.** Con $V = 0{,}2$ certifica 0,97 bits por disparo donde sólo 0,015 son privados, en el 100 % de las corridas. El desfase y la mezcla térmica dejan la salida sin sesgo.
- **El estimador qg con pares ± es seguro en todas las corridas**, porque el corrimiento a de la lectura se cancela. Con un solo giro, el corrimiento infla $r_\perp$ y sobrestima en el 7 % de las corridas con $V = 0{,}2$. Es decir, el "100 % frente a 0 %" de seguridad vale para el estimador con pares, no para cualquier lectura qg.

- **Calibrar b con el §31 recupera de 10 a 50 % más bits certificados** (0,286 frente a 0,245 con $V = 0{,}8$; 0,513 frente a 0,341 con la lectura muy asimétrica), sin perder seguridad.

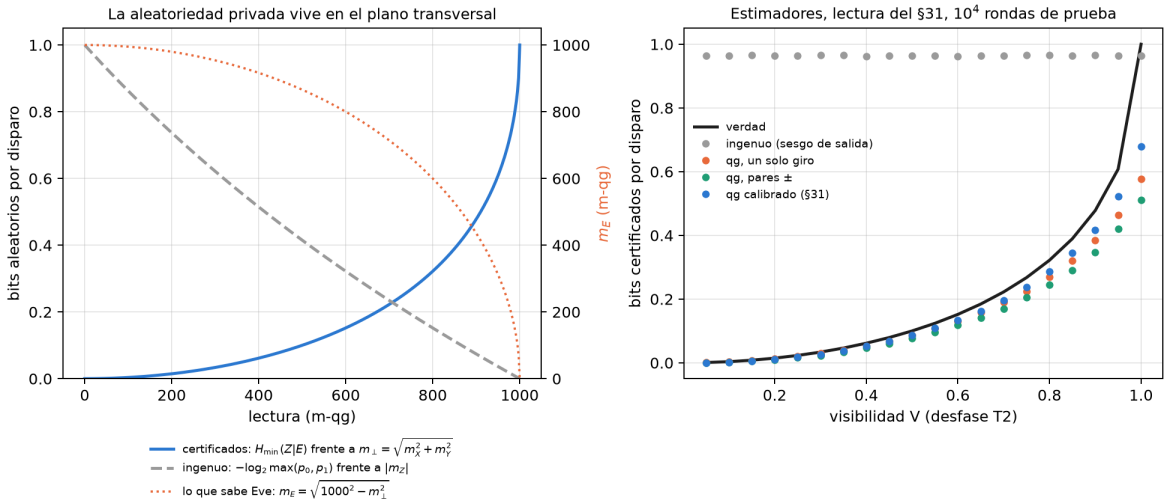


Figura 18.1: Izquierda: bits aleatorios por disparo. El estimador ingenuo lee $|m_Z|$; el certificado lee el radio transversal $m_\perp$; la curva punteada es lo que sabe Eve, $m_E = \sqrt{1000^2 - m_\perp^2}$ (eje derecho). Derecha: los cuatro estimadores frente a la visibilidad, con la lectura del §31 y 10^4 rondas de prueba.

18.3. Junto al polo la certificación pide disparos

Una cota a 3σ con n rondas por ajuste baja el radio en $3000/\sqrt{n}$ m-qg, y junto al polo eso cuesta caro. Para una fuente perfecta, sin error de lectura:

Tabla 18.3: Bits certificados con una cota a 3σ, fórmula cerrada.

rondas de prueba	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
cota de $m_\perp$ (m-qg)	905	970	991	997	999

rondas de prueba	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
lo que se le concede a Eve, m_E (m-qg)	425	243	137	77	44
bits certificados (verdad: 1)	0,489	0,686	0,814	0,892	0,939
con $m_\perp = 950$ (verdad: 0,608)	0,397	0,523	0,578	0,598	0,605

Con la lectura del §31 y el certificador calibrado, la simulación da 0,68, 0,81 y 0,89 bits con 10^4, 10^5 y 10^6 rondas, lo mismo. Lejos del polo la cota converge rápido: con $m_\perp = 950$, 10^5 rondas ya dan el 95 % de la verdad (Figura 18.2, izquierda). Una fuente casi perfecta es la más cara de certificar.

18.4. La calibración de lectura: temperatura o error del detector

El certificador calibrado divide por el factor de escala b de la lectura, y la pregunta es de dónde sale b. En la escala del capítulo 1 la lectura es afín (notas, §31):

$$m_{\text{medida}} = 1000\,a + b\,m, \qquad a = e_{10} - e_{01}, \quad b = 1 - e_{01} - e_{10}.$$

Un qubit real arranca con población térmica p, es decir con $m_{\text{eq}} = 1000(1-2p) = 1000\tanh(hf/2k_BT_{\text{ef}})$. La calibración estándar mide "$|0\rangle$" y "$|1\rangle$", que en verdad son el estado térmico y X sobre él: **dos lecturas para tres incógnitas** (a, b, m_{eq}). Supone $m_{\text{eq}} = 1000$ y carga la población térmica a la lectura: informa $e_{01} + p\,b$ y $e_{10} + p\,b$, exactamente.

Tabla 18.4: La calibración estándar frente al protocolo qg del §31 ($e_{01} = 0{,}015$, $e_{10} = 0{,}04$). La columna estándar es exacta; la columna qg es la mediana de 100 repeticiones del §31.

p	T_{ef} (5 GHz)	m_{eq} (m-qg)	e_{01} estándar	e_{01} protocolo qg (§31)
0	0 mK	1000	0,0150	0,0149
0,01	52 mK	980	0,0245	**0,0151**
0,03	69 mK	940	0,0434	**0,0148**
0,08	98 mK	840	0,0906	**0,0152**

El protocolo qg agrega la tercera ecuación. Mide, lee de nuevo y usa la covarianza de las dos lecturas, $V = b^2(1 - q g_{\text{eq}}^2)$, que separa b de m_{eq} en forma cerrada. Según las notas, recupera la temperatura con ±1 mK desde 52 mK. El capítulo 27 lo desarrolla. Aquí importa su consecuencia para el QRNG: **calibrar con la suite estándar vuelve inseguro al certificador**. Con una fuente térmica ($V = 0{,}9$), dividir por la b estándar, que es $b(1 - 2p)$, devuelve $r_\perp$ sin la contracción térmica y certifica de más.

Tabla 18.5: Fuente térmica con $V = 0{,}9$, 10^4 rondas de prueba, 300 corridas: el certificador con cada calibración.

p	verdad	calibrado con b estándar	calibrado con b verdadera
0,01	0,443	0,418 (0,01 inseguras)	0,390 (0)
0,03	0,383	0,414 (**1,00** inseguras)	0,339 (0)
0,05	0,334	0,413 (**1,00** inseguras)	0,297 (0)

18.5. En el simulador ruidoso de IonQ, con una fuga

En las notas (§42) la fuga es real: un ion q es la fuente y un segundo ion e hace de entorno. Una interacción $\text{MS}(0, 0, \theta)$ le deja a e aprender el valor X de q, y la salida se lee en X. Sigue siendo una moneda justa, pero la aleatoriedad privada cae a la fórmula de arriba con $r = |\cos 2\pi\theta|$ (X y Z intercambiados). Las rondas de prueba miden ±Z y ±Y, y dos circuitos calibran la lectura. Todo está en

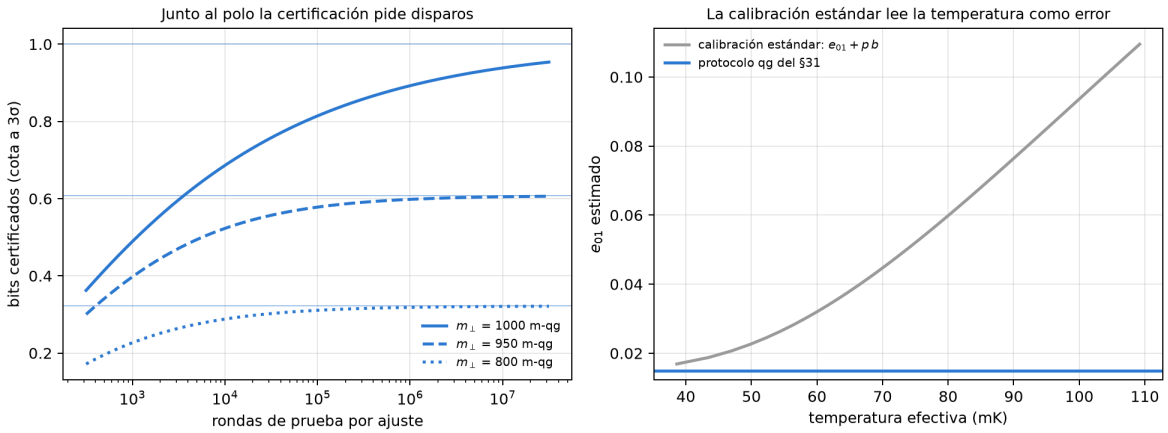


Figura 18.2: Izquierda: bits certificados con una cota a 3σ frente al número de rondas de prueba, para tres radios transversales; las líneas finas son la verdad. Derecha: el e_{01} que informa la calibración estándar crece con la temperatura efectiva, $e_{01} + p\,b$; el protocolo qg del §31 lo deja en su valor.

compuertas nativas (GPI, GPI2, MS), con 5 pares por circuito, 10^4 muestras por ajuste y tres repeticiones por modelo de ruido, en el simulador gratuito. No se envió nada a una QPU.

Tabla 18.6: Bits certificados por disparo, media de 3 corridas (aria-1 / forte-1 donde difieren; $m_\perp$ de aria-1).

θ (vueltas)	verdad	ingenuo	qg, un giro	**qg, pares ±**	$m_\perp$ medido / ideal
0 (sin fuga)	1,000	0,98	0,69	0,73	1000 / 1000
0,04	0,680	0,99 / 0,98	0,53	**0,56 / 0,55**	954 / 969
0,08	0,433	0,98 / 0,97	0,37 / 0,36	**0,38 / 0,37**	866 / 876
0,12	0,248	1,00 / 0,98	0,22 / 0,21	**0,22**	721 / 729

- **El estimador ingenuo no ve la fuga:** 0,97–1,00 bits por disparo en todas las corridas, por encima de la verdad en el 100 % de las corridas con $\theta > 0$. Con $\theta = 0{,}12$ certifica cuatro veces la aleatoriedad privada.
- **El estimador qg es seguro en las 24 celdas** (corrida × θ) y captura el 81–90 % de la verdad cuando hay fuga, y el 73 % sin ella, por el polo de la sección anterior.
- **La calibración no agrega nada aquí.** La lectura del simulador es casi perfecta ($b = 0{,}9998$–$1{,}0000$, $|a| \le 2{\cdot}10^{-4}$). La ganancia de 10–50 % necesita

errores de lectura como los del hardware, y este es un límite del modelo de ruido que sólo una QPU puede revisar.

- **El ruido de la compuerta se cuenta como privacidad perdida:** el $m_{\perp}$ medido queda 1–2 % por debajo del ideal, que es el error de la MS. Es correcto que sea así, porque el certificador no puede saber quién se llevó esa longitud.

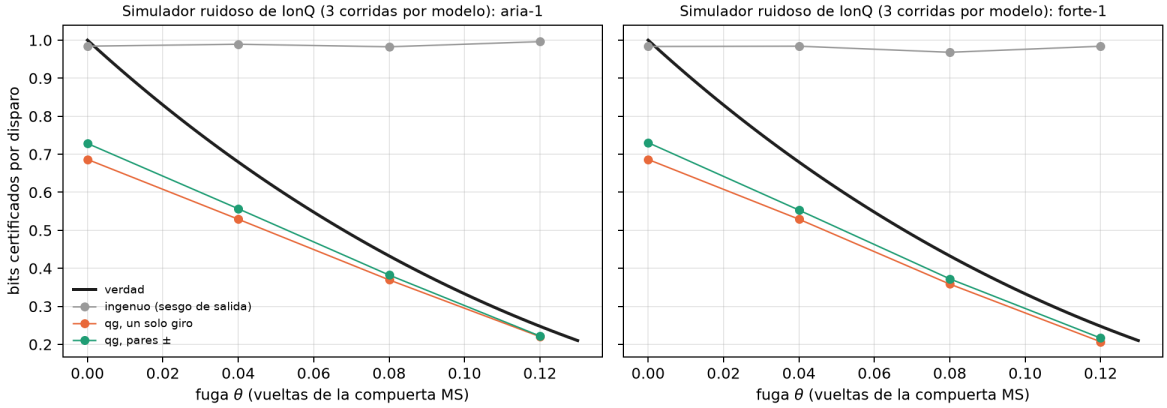


Figura 18.3: Bits certificados por disparo frente a la intensidad de la fuga en el simulador de IonQ (aria-1 y forte-1). El estimador ingenuo queda cerca de 1; los estimadores qg quedan siempre por debajo de la verdad.

18.6. Lo que queda pendiente

No hay corrida en hardware. La prueba que falta es un QRNG en un dispositivo con errores de lectura reales, donde la calibración del §31 debería mostrar su ganancia de 10–50 %. Es un QRNG que depende del dispositivo (medición de confianza, rondas independientes e idénticas), no aleatoriedad independiente del dispositivo. Y la fuga del §42 es una interacción diseñada, no la mejor estrategia de un adversario.

18.7. Sin qang y con qang

Tabla 18.7: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
certificar bits por el sesgo de salida	$-\log_2 \max(p_0, p_1)$	lo mismo en m_Z	**ninguna**: los dos fallan igual, 100 % inseguro con desfase
certificar bits privados	$H_{\min}(Z \mid E)$ de Helstrom con la purificación	$m_E = \sqrt{1000^2 - m_\perp^2}$: lo que sabe Eve es la longitud que falta	**equivalente** en la cuenta (la fórmula es estándar); **a favor** en la lectura: la privacidad está en el plano transversal y se mide con dos giros
cuántas rondas de prueba hacen falta	propagación de errores sobre $H_{\min}$	el polo del capítulo 1: 10 m-qg de radio le dan 141 m-qg a Eve	**a favor**, modesto: explica de un vistazo por qué la fuente perfecta es la más cara
calibrar la lectura	dos circuitos; la temperatura se lee como error	lectura afín y una tercera ecuación (§31)	**a favor**: evita un certificador inseguro (100 % de corridas con $p \geq 0{,}03$) y recupera 10–50 % de bits
detectar una fuga (IonQ simulado)	el sesgo no la ve	seguro en 24 de 24 celdas, 81–90 % de la verdad	**a favor** del estimador transversal, que es estándar en QRNG dependientes del dispositivo

Balance. La cota de entropía es la de siempre, y un experto en QRNG ya mide la coherencia transversal. Lo que aporta la base del capítulo 1 es leerla: lo que sabe el adversario es una lectura en m-qg, m_E, la longitud que le falta al estado para llegar a la esfera. De ahí salen dos cosas que se ven a simple vista, la caída de

la certificación cerca del polo y el peligro de calibrar la lectura con dos circuitos. La segunda es la ganancia más concreta del capítulo, y se debe al protocolo del §31, no a la unidad.

18.8. En código

```
import math
import sys
sys.path.insert(0, "examples")
import qrng_qg_certified as Q

m_x, m_y = 800.0, 0.0                      # lecturas transversales (m-qg)
m_perp = math.hypot(m_x, m_y)
m_e = math.sqrt(1000**2 - m_perp**2)       # 600: lo que sabe Eve
-math.log2((1000 + m_e) / 2000)            # 0.322 bits privados por disparo
Q.h_min_certified(m_perp / 1000)           # 0.322, la misma cuenta
```

18.9. Resumen

- La salida de un QRNG de un qubit es la lectura m_Z; su privacidad es el radio transversal $m_\perp$. Lo que sabe un adversario con la purificación es una lectura más, $m_E = \sqrt{1000^2 - m_\perp^2}$.
- El análisis por sesgo de salida certifica casi 1 bit por disparo aunque el estado esté casi mezclado: inseguro en el 100 % de las corridas con desfase o mezcla térmica. El estimador qg con pares ± es seguro en todas.
- Cerca del polo la certificación es cara: 10 m-qg de radio valen 0,19 bits, y una fuente perfecta da 0,69 bits certificados con 10^4 rondas y 0,89 con 10^6.
- La calibración estándar lee la temperatura como error de lectura, y usarla vuelve inseguro al certificador. El protocolo del §31 la separa y recupera 10–50 % de bits.
- En el simulador de IonQ, con una fuga diseñada, el estimador ingenuo no la ve y el qg es seguro en todas las celdas.

Notas bibliográficas

La discriminación óptima de estados es Helstrom (1976), y el significado operativo de la min-entropía, Konig et al. (2009). Para generadores cuánticos de números aleatorios, véanse las revisiones Herrero-Collantes y Garcia-Escartin (2017) y Ma et al. (2016). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

19 Baterías cuánticas y redes

Una batería cuántica es un sistema que guarda energía para entregarla después como trabajo. La más chica es un qubit con $H = \omega|1\rangle\langle 1|$: cargarla es llevarlo hacia $|1\rangle$, y descargarla es devolverlo a $|0\rangle$ con una operación unitaria. La pregunta práctica no es cuánta energía tiene el qubit, sino cuánta se puede sacar, que es su **ergotropía**. Este capítulo la lee en la escala del capítulo 1. Energía, ergotropía y la parte que nadie puede sacar son tres distancias entre lecturas. Con eso se responde cómo cargar una batería que va a esperar con T1 y T2, cuánto cuesta certificar su carga con disparos, y dónde queda la carga de un registro de qubits cuando vive en las correlaciones. La última sección pasa a las redes: un par de Bell guardado en dos memorias es otra cosa que se almacena con T1 y T2, y su tiempo útil se lee igual.

19.1. Desde la base: tres distancias entre lecturas

Un qubit con lecturas (m_X, m_Y, m_Z) y radio $m_r = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2}$ tiene energía $\omega(1000 - m_Z)/2000$: la distancia de su lectura Z al polo norte, que es el estado fundamental. Su ergotropía, el trabajo máximo que extrae una operación unitaria, es (notas, §56)

$$W = \omega\,\frac{m_r - m_Z}{2000},$$

y lo que queda sin extraer, la energía del estado pasivo, es $\omega(1000 - m_r)/2000$. **La energía se reparte entre lo que el estado está por debajo del techo de su propia esfera, $m_r - m_Z$, y lo que la esfera perdió de radio, $1000 - m_r$.** Una unitaria gira el estado sin cambiarle el radio, así que lo mejor que puede hacer es llevarlo al techo de su esfera, $m_Z = m_r$. La parte perdida por la mezcla no la saca ninguna unitaria.

Para un estado puro, $m_r = 1000$ y $W = \omega \sin^2(\theta/2) = \omega\, p_1$: **la ergotropía es la ecuación de probabilidad del capítulo 1**, con el ángulo qang como ángulo de carga (comprobado a $2 \cdot 10^{-16}$). En la escala angular qga (Sección 1.4), $W = \omega \sin^2(\pi\theta_{qga}/1000)$: la batería está vacía en 0 qga, a media carga en 250 qga

y llena en 500 qga. Las notas separan además $W = W_{\text{inc}} + W_{\text{coh}}$, con $W_{\text{inc}} = \omega\,\text{máx}(0, -qg_Z)$ (la inversión de población) y $W_{\text{coh}} = \frac{\omega}{2}(r - |qg_Z|)$ (la coherencia). Las fórmulas coinciden con la expresión general por autovalores a $3 \cdot 10^{-16}$ en 200 estados al azar.

Tabla 19.1: Energía de un qubit en unidades de ω, repartida según sus lecturas.

estado	m_Z	m_r	energía	extraíble	atrapada por la mezcla
puro, invertido	−1000	1000	1,000	1,000	0
puro, en el ecuador	0	1000	0,500	0,500	0
puro, $\theta = 2\pi/3$	−500	1000	0,750	0,750	0
mezclado, abajo	−500	500	0,750	0,500	0,250
mezclado, en el ecuador	0	500	0,500	0,250	0,250
invertido y envejecido, $t = 0{,}8\,T_1$	+101	101	0,449	**0**	0,449

El último renglón es una batería **pasiva**: tiene casi media unidad de energía y no entrega nada, porque está en el techo de su esfera ($m_Z = m_r$). Le pasa a toda batería invertida cuando su lectura Z cruza el ecuador hacia arriba.

19.2. Almacenar con T1 y T2: la inversión muere en el ecuador

Una batería cargada con ángulo θ envejece así:

$$m_Z(t) = 1000\big[1 - (1 - \cos\theta)\,e^{-t/T_1}\big], \qquad m_\perp(t) = 1000\,\sin\theta\,e^{-t/T_2}.$$

La batería invertida ($\theta = \pi$) no tiene coherencia y sólo guarda inversión: $m_Z = 1000(1 - 2e^{-t/T_1})$, que cruza el ecuador en $t = T_1 \ln 2$. Ahí su ergotropía es cero y no vuelve. Una batería inclinada guarda menos al principio, pero su coherencia

la mantiene por debajo del techo de su esfera después del cruce, mientras T_2 lo permita.

Tabla 19.2: Mejor ángulo de carga y ergotropía guardada (mejor / invertida / ecuador, en unidades de ω).

T_2/T_1	cruce t_c	$t = 0{,}5\,T_1$	$t = T_1$	$t = 2\,T_1$
2	$0{,}288\,T_1 = \ln(4/3)$	$0{,}70\pi$: 0,297 / 0,213 / 0,240	$0{,}58\pi$: 0,129 / 0 / 0,122	0,038 / 0 / 0,038
1	$0{,}405\,T_1 = \ln(3/2)$	$0{,}78\pi$: 0,234 / 0,213 / 0,165	$0{,}59\pi$: 0,054 / 0 / 0,050	0,005 / 0 / 0,005
0,5	$0{,}618\,T_1$	π: 0,213 / 0,213 / 0,073	$0{,}60\pi$: 0,008 / 0 / 0,007	≈ 0
0,2	$0{,}692\,T_1$	π: 0,213 / 0,213 / 0,004	≈ 0	≈ 0

- **La regla de carga.** Si la batería se va a usar antes de t_c, conviene cargarla del todo ($\theta = \pi$). Si no, conviene inclinarla, hasta unos $0{,}6\pi$ a $t = T_1$. El cruce resuelve $x^{2T_1/T_2 - 1} = 2(2x - 1)$ con $x = e^{-t_c/T_1}$, que sale de un análisis de inclinación chica y coincide con el óptimo numérico a 10^{-6}; para $T_2 = 2T_1$ y $T_2 = T_1$ da las formas cerradas $\ln(4/3)$ y $\ln(3/2)$.
- **El cruce tiende al ecuador.** Cuando T_2 se achica, t_c tiende a $T_1 \ln 2 = 0{,}693\,T_1$, el momento en que la lectura Z de la batería invertida cruza el ecuador. Sin coherencia no hay nada que inclinar.
- **La coherencia compra tiempo sólo si T_2 se parece a T_1.** A $t = T_1$ una batería inclinada guarda $0{,}13\,\omega$ ($T_2 = 2T_1$) o $0{,}05\,\omega$ ($T_2 = T_1$), donde la invertida no guarda nada. Con $T_2 = 0{,}2\,T_1$ no compra nada. En iones atrapados, donde T1 casi no existe, conviene cargar siempre del todo.

19.3. Certificar la carga con disparos

La ergotropía se estima con disparos en los tres ejes, y la fórmula tiene una trampa. El radio estimado sale inflado, porque el ruido de los tres ejes se suma en cuadratura: $E[\hat{r}^2] = r^2 + 3\sigma^2$. Y una batería pasiva está justo en el techo de su esfera, de modo que cualquier inflación del radio la hace parecer cargada.

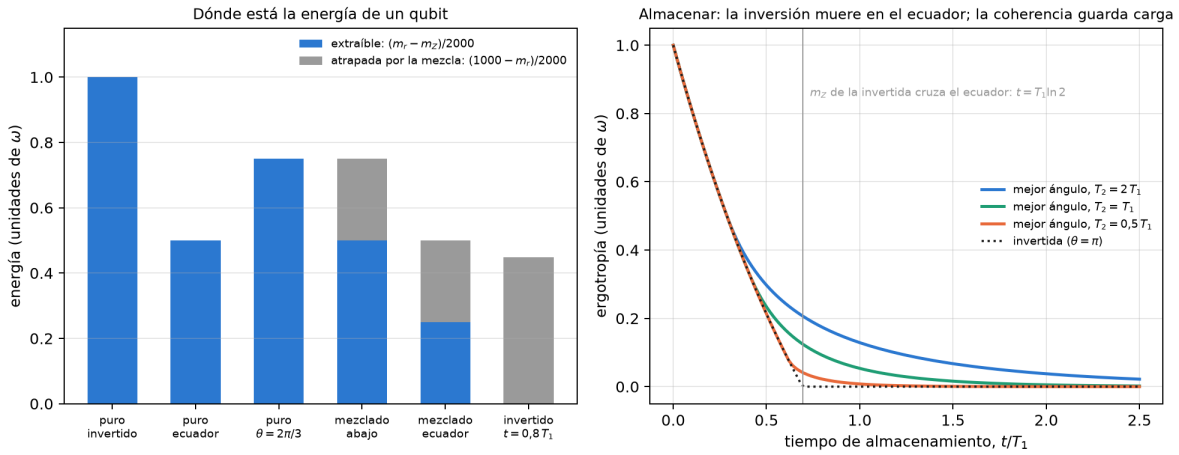


Figura 19.1: Izquierda: la energía de seis estados, repartida entre lo extraíble, $(m_r - m_Z)/2000$, y lo atrapado por la mezcla, $(1000 - m_r)/2000$; los estados mezclados tienen radio 500 m-qg. Derecha: la ergotropía guardada con el mejor ángulo de carga para tres cocientes T_2/T_1, y la de la batería invertida, que muere cuando su m_Z cruza el ecuador.

Tabla 19.3: Ergotropía estimada (unidades de ω), media de 4000 corridas; entre paréntesis, la fracción de corridas por encima de la verdad.

disparos por eje	100	300	1000	3000	10 000
invertida, $t = 0{,}5\,T_1$ (verdad 0,213): estimación directa	0,237 (0,60)	0,220 (0,54)	0,215 (0,52)	0,214 (0,52)	0,213 (0,50)
invertida: cota inferior a 3σ	0,005	0,025	0,086	0,139	0,172
pasiva, $t = 0{,}8\,T_1$ (verdad 0): estimación directa	0,042 (0,99)	0,016 (1,00)	0,005 (1,00)	0,002 (1,00)	0,001 (1,00)

disparos por eje	100	300	1000	3000	10 000
pasiva: cota inferior a 3σ	0	0	0	0	0

- **La estimación directa sobrestima en más de la mitad de las corridas**, y declara carga en una batería pasiva en el 99–100 % de ellas.
- **La cota a 3σ nunca es insegura, pero es cara:** con 1000 disparos por eje certifica 0,086 de $0{,}213\,\omega$, y con 10^4 todavía sólo el 81 %. Una batería casi descargada no se certifica con ningún número razonable de disparos.

Es el mismo problema que el QRNG del capítulo 18: una cantidad que depende del radio, leída junto a un borde.

19.4. Registros: la carga bloqueada en las correlaciones

En un registro de qubits la carga puede vivir en las correlaciones. Las notas comparan dos baterías de 4 qubits con 2 excitaciones, las dos con energía 2ω, envejecidas con ruido local ($T_2 = T_1$):

- el **estado de Dicke** $D(4,2)$, la superposición pareja de los seis registros con dos unos;
- un **producto** de cuatro qubits en el ecuador, con la misma energía.

Leídas qubit por qubit, son opuestas. En el Dicke cada qubit lee $(m_X, m_Y, m_Z) = (0,0,0)$: radio local cero, el centro de la esfera, un qubit pasivo. En el producto cada qubit lee $(1000, 0, 0)$: radio 1000, ergotropía $\omega/2$. Sin embargo, la lectura Z media del registro es idéntica en las dos, en todo momento (0, 95, 259, 503 y 777 m-qg para $t = 0$, 0,1, 0,3, 0,7 y 1,5 T_1), y no las distingue.

Tabla 19.4: Registro de 4 qubits con 2 excitaciones (ergotropía en unidades de ω).

t/T_1	0	0,1	0,3	0,7	1,5
Dicke: ergotropía global	2,000	1,489	0,710	0,049	0

t/T_1	0	0,1	0,3	0,7	1,5
Dicke: suma de las locales	0	0	0	0	0
producto: global = suma de las locales	2,000	1,629	1,051	0,407	0,063
m_Z medio del registro (m-qg)	0	95	259	503	777

- **La carga del Dicke está bloqueada.** Toda es extraíble con una operación global, y ninguna con operaciones de un qubit: la suma de las ergotropías locales es cero. La del producto es toda local.
- **El radio local las distingue; la lectura media no.** La suma de las ergotropías locales, que sale de las tres lecturas de cada qubit, separa una batería de la otra.
- **La carga bloqueada es más frágil** con ruido local: 0,71 frente a $1{,}05\,\omega$ a $0{,}3\,T_1$, y 0,05 frente a $0{,}41\,\omega$ a $0{,}7\,T_1$.

El radio local cero no es nuevo en el libro. Es lo que leen los qubits de un par de Bell en una red (capítulo 12, §57) y los qubits de conteo de Shor con $N = 21$ antes de la QFT (capítulo 16). En los tres casos lo que importa está en las correlaciones, y la lectura de un qubit sólo puede decir que no está en él.

19.5. Redes: un par de Bell guardado en dos memorias

Una red cuántica también guarda algo en memorias con T1 y T2: los pares de Bell que reparte entre sus nodos. El capítulo 12 leyó un par en qg (tres correladores y dos sesgos locales) y eligió con esa lectura cómo destilarlo. Falta la pregunta de esta sección, la misma que la de la batería: cuánto tiempo puede esperar un par en la memoria antes de no servir. Para $|\Phi^+\rangle$ con las dos mitades guardadas un tiempo t, las lecturas tienen forma cerrada (notas, §57; coinciden con la matriz densidad a $5 \cdot 10^{-16}$):

$$c_x = -c_y = e^{-2t/T_2}, \qquad c_z = 1-2g+2g^2, \qquad m_A = m_B = 1000\,g, \qquad g = 1-e^{-t/T_1}.$$

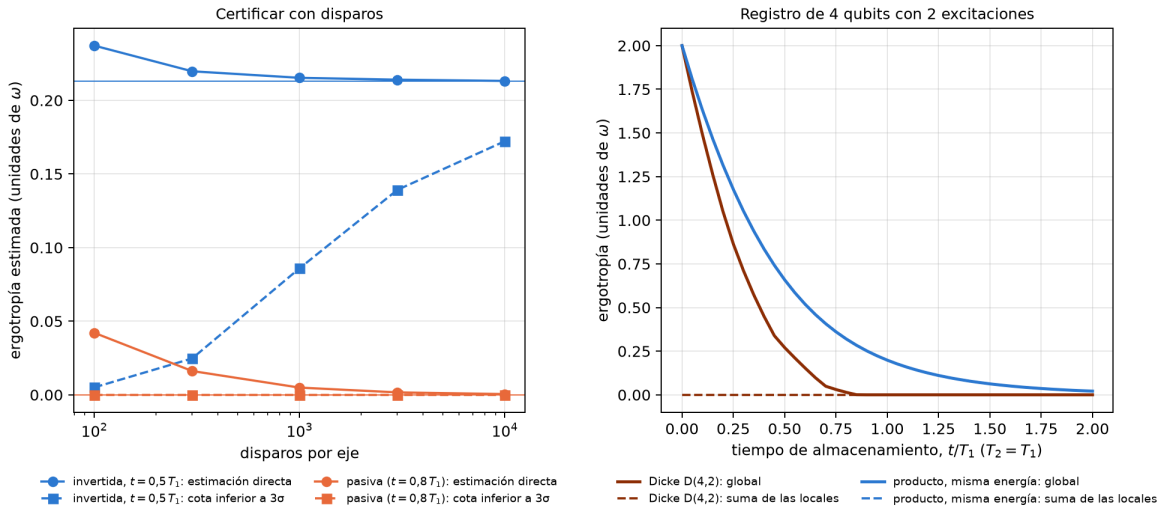


Figura 19.2: Izquierda: estimación directa y cota inferior a 3σ de la ergotropía frente a los disparos por eje, para una batería invertida a $t = 0{,}5\,T_1$ y una pasiva a $t = 0{,}8\,T_1$; las líneas finas son la verdad. Derecha: ergotropía global y suma de las locales del registro de Dicke y del producto con la misma energía; en el producto las dos curvas coinciden.

Los sesgos locales m_A y m_B suben desde cero: es el testigo de T1 sobre un par compartido, la misma lectura que corría el centro de la imagen de la esfera en BB84 (capítulo 17). El par sirve para una clave BBM92 mientras $1 - h(Q_X) - h(Q_Z) > 0$, con $Q_X = (1 - c_x)/2$ y $Q_Z = (1 - c_z)/2$.

Tabla 19.5: Cuánto puede esperar un par de Bell guardado, para una clave BBM92 (fracción secreta positiva por par de entrada).

T_2/T_1	2	1	0,5	0,2
corte sin destilar (T_1)	0,184	0,129	0,088	0,051
lecturas en el corte: $1000\,c_x$ / $1000\,c_z$ / m_A (m-qg)	832 / 720 / 168	773 / 787 / 121	702 / 845 / 85	598 / 905 / 50
corte con una ronda DEJMPS (T_1)	0,395	0,232	0,144	0,076
destilar conviene después de (T_1)	0,085	0,083	0,056	0,032

- **Un par dura mucho menos que una batería.** La batería invertida guarda carga hasta $0{,}69\,T_1$; el par deja de dar clave a $0{,}05$–$0{,}18\,T_1$, porque la clave exige correladores cerca del umbral de Shor–Preskill del capítulo 16: 780 m-qg cuando el error es igual en las dos bases, y aquí repartido entre ellas (832 y 720 m-qg con $T_2 = 2T_1$). Lo que se guarda es una correlación, y la clave la pide casi intacta.
- **Una ronda de destilación casi duplica el tiempo útil** cuando lo limita T1 (0,184 → 0,395 con $T_2 = 2T_1$). Cuesta la mitad de los pares, así que con pares frescos baja la clave por par de entrada. Conviene destilar sólo después del cruce de la última fila, y ese cruce se lee de los correladores envejecidos.
- **Las dos memorias tienen la misma regla de fondo.** En la batería, la coherencia (T_2) compra tiempo después del cruce de la inversión. En el par, la destilación compra tiempo después de su propio cruce. En los dos casos el cruce sale de las lecturas.

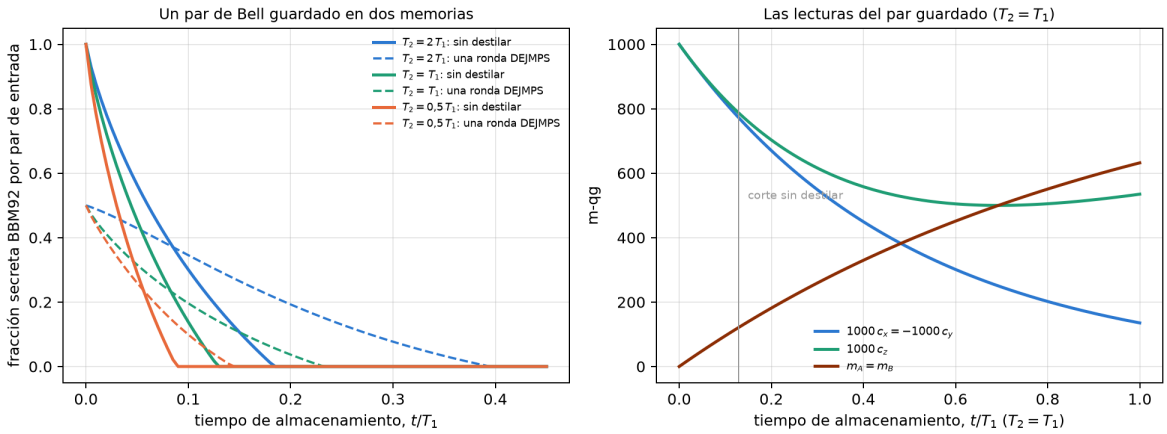


Figura 19.3: Izquierda: fracción secreta BBM92 por par de entrada de un par de Bell guardado, sin destilar y con una ronda DEJMPS, para tres cocientes T_2/T_1. Derecha: las lecturas del par guardado con $T_2 = T_1$; los sesgos locales $m_A = m_B$ suben desde cero (el testigo de T1) y la línea gris es el corte sin destilar.

19.6. Lo que queda pendiente

Todo es exacto o simulado: no hay corrida en hardware. Faltan una batería real cargada con distintos ángulos en un dispositivo con $T_2 \approx T_1$, donde la regla de carga se pueda poner a prueba, y la preparación de un Dicke $D(4, 2)$ con la medición de su ergotropía local. En la parte de redes, la destilación se calcula sobre el estado girado (diagonal de Bell) con compuertas locales perfectas, y el corte supone memorias iguales en los dos nodos.

19.7. Sin qang y con qang

Tabla 19.6: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
calcular la ergotropía	autovalores de ρ y la energía pasiva	$(m_r - m_Z)/2000$	**equivalente**: es la fórmula estándar de un qubit escrita en lecturas

acción	sin qang	con qang	diferencia
saber cuánta energía nadie puede sacar	energía del estado pasivo	$(1000 - m_r)/2000$, el radio perdido	**a favor**, modesto: el reparto se lee de un vistazo
ergotropía de un estado puro	$\omega \sin^2(\theta/2)$	la ecuación de probabilidad del capítulo 1, $\omega\, p_1$	**equivalente**; muestra que la base del capítulo 1 es la de la carga
decidir cómo cargar	optimización numérica del ángulo	cruce cerrado $x^{2T_1/T_2-1} = 2(2x-1)$; la inversión muere al cruzar el ecuador	**a favor**: una regla cerrada y una imagen (el ecuador); la regla es aporte de las notas, no de la unidad
certificar la carga	estimación directa	la pasiva está en el techo de su esfera, y el radio inflado la vuelve "cargada"	**a favor** como diagnóstico; la cura, la cota a 3σ, es estadística estándar
distinguir carga local de bloqueada	ergotropía global y local con tomografía	radio local de cada qubit; la lectura media no sirve	**equivalente** en la cuenta, **a favor** en la lectura: es el mismo radio local cero de los capítulos 12 y 16
decidir cuánto guardar un par de Bell	fidelidad y tasa de clave del estado envejecido	correladores y sesgos en forma cerrada; corte y cruce de destilación leídos de ellos	**equivalente** en la cuenta; los cortes son conocidos, la forma cerrada y el cruce son aporte de las notas

Balance. Las fórmulas son las estándar de la ergotropía de un qubit, y las baterías con almacenamiento asistido por coherencia o con carga bloqueada ya están en la literatura. Lo que aporta la base del capítulo 1 es la lectura: la energía se reparte entre lo que el estado está por debajo del techo de su esfera y lo que perdió de radio. Con esa lectura se ve por qué la batería invertida muere en el ecuador, por qué la estimación directa ve carga donde no hay, y por qué un registro de Dicke parece descargado qubit por qubit. La regla de carga con su cruce cerrado es aporte de las notas.

19.8. En código

```
import math
import sys
sys.path.insert(0, "examples")
import battery_ergotropy_qg as BT

m_x, m_y, m_z = 500.0, 0.0, 0.0             # mezclado en el ecuador (m-qg)
m_r = math.sqrt(m_x**2 + m_y**2 + m_z**2)
(1000 - m_z) / 2000, (m_r - m_z) / 2000, (1000 - m_r) / 2000  # energía 0.5, extraíble 0.25
BT.ergotropy(0.5, 0.0, 0.0)                       # 0.25, la misma cuenta
BT.crossover_time_analytic(1.0), math.log(1.5)  # 0.405 y 0.405: el cruce con T2 = T1
```

19.9. Resumen

- La energía de un qubit se reparte entre lo extraíble, $(m_r - m_Z)/2000$, y lo atrapado por la mezcla, $(1000 - m_r)/2000$; para un estado puro la ergotropía es la ecuación de probabilidad del capítulo 1, $\omega\, p_1$.
- Una batería invertida muere cuando su lectura Z cruza el ecuador, en $t = T_1 \ln 2$. Una batería inclinada guarda carga después de eso si T_2 se parece a T_1, y la regla de carga tiene un cruce cerrado: $\ln(4/3)$ para $T_2 = 2T_1$, $\ln(3/2)$ para $T_2 = T_1$.
- La estimación directa de la ergotropía sobrestima, y declara carga en una batería pasiva en casi todas las corridas; la cota a 3σ es segura pero cara.
- En un registro de Dicke toda la carga está en las correlaciones: cada qubit lee el centro de la esfera, la suma de las ergotropías locales es cero, y la lectura media no lo distingue de un producto con la misma energía.
- Un par de Bell guardado da clave sólo hasta $0{,}05$–$0{,}18\, T_1$, mucho menos que una batería; una ronda de destilación casi duplica ese tiempo, y conviene sólo después de un cruce que se lee de los correladores.

Notas bibliográficas

Los estados pasivos son Pusz y Woronowicz (1978), y la ergotropía, Allahverdyan et al. (2004). La ventaja del entrelazamiento en el trabajo extraíble es Alicki y Fannes (2013); para baterías cuánticas en general, véase Campaioli et al. (2024). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo

verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte VII

VII. Aprendizaje automático cuántico (QML) y el filtro de simetría

20 Redes neuronales cuánticas que conservan el peso (WeightQNN)

La Parte VII trata el aprendizaje automático cuántico, y empieza por la red que mejor se lleva con la base del capítulo 1. Una red neuronal cuántica (QNN) que conserva el peso de Hamming (el número de unos del registro) vive en un sector fijo, y eso tiene dos consecuencias. La primera es buena: el filtro qg, que descarta los disparos que salieron del sector, deja la lectura exacta bajo la relajación T1. La segunda es honesta: una red así es simulable en una computadora común, y no puede dar ventaja cuántica. Este capítulo lee la red en m-qg, verifica con código las propiedades estructurales y resume los experimentos de clasificación de las notas (§75–§114), todos con predicciones registradas antes de correr, con y sin qang.

20.1. Desde la base: un sector y sus lecturas

La compuerta RBS (*reconfigurable beam splitter*) gira la pareja $|01\rangle, |10\rangle$ con un ángulo θ y deja quietos $|00\rangle$ y $|11\rangle$: es una rotación de Givens, y no cambia el número de unos. En el sector de peso 1 de n qubits el estado es un vector unitario $u \in \mathbb{R}^n$, una capa de RBS es una matriz ortogonal, y cada qubit tiene la lectura del capítulo 1:

$$m_Z(q) = 1000\,(1 - 2u_q^2),$$

porque u_q^2 es la probabilidad de que la excitación esté en el qubit q. La red E de las notas (§76) carga los datos como amplitudes, $v = (x_1, \ldots, x_4, 1)/|(x, 1)|$ en 5 qubits (la constante conserva la norma de x), aplica 3 capas de RBS (9 subcapas, 15 parámetros) y lee $z = \sum_q c_q\, qg_Z(q) + b$. La red W hace lo mismo en el sector de peso 2.

El filtro bajo T1. La relajación T1 lleva un estado de peso k a peso $k - 1$ y, si todos los qubits tienen el mismo T1, amortigua todas las amplitudes de peso k por el mismo factor. Quedarse sólo con los disparos de peso k devuelve entonces la distribución sin ruido, exactamente, para cualquier intensidad (notas, §76 F1

y §78 F4). El precio se conoce antes de correr: el filtro conserva una fracción $K = (1-\gamma)^{k\,d}$ de los disparos, con d el número de subcapas, sea cual sea el dato o el parámetro (§77).

Tabla 20.1: El filtro bajo T1 igual ($\gamma = 0{,}08$ por qubit y por subcapa, 9 subcapas), en m-qg, sobre 40 entradas y parámetros al azar. Las dos últimas columnas son el sesgo medio del filtro con T1 desigual (dispersión 0,5) y con desfase 0,01 por subcapa, que el filtro no corrige.

modelo	$\lvert$filtrada − sin ruido$\rvert$ máx.	$\lvert$cruda − sin ruido$\rvert$ media	K simulada	$(1-\gamma)^{kd}$	sesgo con T1 desigual	sesgo con desfase
E, 5 qubits, peso 1	$6 \cdot 10^{-13}$	211	0,4722	0,4722	33	64
W pares, 5 qubits, peso 2	$8 \cdot 10^{-13}$	426	0,2229	0,2229	45	75
W dual con qg_{ZZ}, peso 2	$8 \cdot 10^{-13}$	506	0,2229	0,2229	31	89
E, 8 qubits, peso 1	$7 \cdot 10^{-13}$	132	0,4722	0,4722	29	48
W anillo, 8 qubits, peso 2	$5 \cdot 10^{-13}$	264	0,2229	0,2229	38	35

En la escala del capítulo 1 se ve qué hace el ruido sin filtro. Un disparo que decayó tiene un uno menos, y sus qubits leen $+1000$: **las lecturas crudas corren hacia el polo norte**. En el ejemplo de la Figura 20.1 (peso 2, codificación dual), las cinco lecturas sin ruido están entre 157 y 260 m-qg, las crudas bajo T1 entre 543 y 664, y las filtradas vuelven exactamente a 157–260. El filtro no corrige lo que no cambia el peso: el T1 desigual y el desfase dejan sesgos de 30 a 90 m-qg.

20.2. Arquitecturas y codificaciones

Las notas comparan, en cuatro conjuntos de datos reales de 4 rasgos (iris, cáncer de mama, vino y dígitos 3 contra 8), una QNN estándar (A: codificación por ángulo,

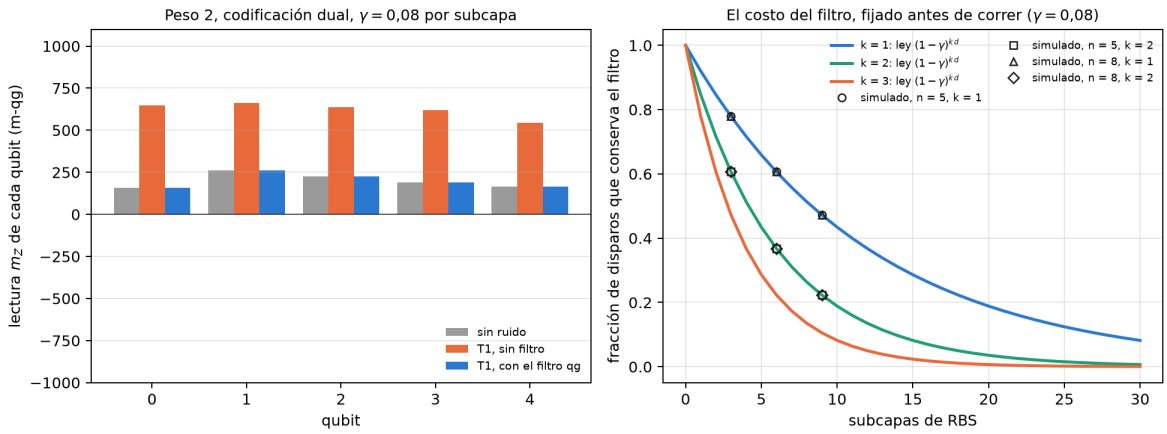


Figura 20.1: Izquierda: lectura m_Z de cada qubit de una red de peso 2 (codificación dual), sin ruido, bajo T1 sin filtro y bajo T1 con el filtro; las crudas corren hacia el polo norte y las filtradas coinciden con las sin ruido. Derecha: la fracción de disparos que conserva el filtro frente al número de subcapas; las líneas son la ley $(1-\gamma)^{kd}$ y los puntos, simulaciones de 5 y 8 qubits.

capas Ry/Rz con anillo de CZ) con las redes que conservan el peso. La primera red de peso 1 (D, §75) perdía la norma de x y era la más débil (0,765). La red E, que la conserva, cierra la brecha (§76):

Tabla 20.2: Precisión media de prueba (5 particiones, notas §76).

conjunto	RBF-SVM	MLP	gemelo cuadrático	A	D	E
iris	0,913	0,920	0,900	0,907	0,647	0,913
cáncer	0,967	0,973	0,957	0,980	0,910	0,983
vino	0,979	0,990	0,969	0,964	0,795	0,985
dígitos	0,967	0,960	0,943	0,957	0,813	0,960
media	0,957	0,961	0,942	0,952	0,791	0,960

Con 60 corridas por modelo (5 semillas × 3 particiones × 4 conjuntos, §80), el resultado central es este:

Tabla 20.3: Precisión media sobre 60 corridas (notas §80).

lectura	E con qang	E sin qang	W con qang	W sin qang
sin ruido	0,952		0,922	

lectura	E con qang	E sin qang	W con qang	W sin qang
T1, entrenada sin ruido	0,952	0,928	0,922	0,757
T1, entrenada con el ruido	0,952	0,951	0,922	0,924
desfase, entrenada sin ruido	0,918	0,792	0,882	0,656

- **Entrenada en un simulador y corrida bajo T1, qang decide:** +2,5 puntos en peso 1 [0,8; 4,1] y +16,5 en peso 2 [11,8; 21,2] (IC 95 % entre semillas). Sin el filtro, W cae a 0,76 porque el 78 % de sus disparos decayó.
- **Entrenada bajo el ruido calibrado, qang no agrega nada medible** (+0,1 y −0,1 puntos). La red sin filtro aprende el decaimiento.
- **El desfase pide entrenar con ruido** (+3,2 y +4,5 puntos), aunque el filtro igual le saca la parte de T1 (+12,6 y +22,6 puntos entrenando sin ruido).
- **El peso 2 costaba 3 puntos**, y la causa resultó ser la codificación, no el circuito (§87). El producto de pares distorsiona los datos: su techo de información, medido con una regresión sobre todos los productos de amplitudes, es 2,4 puntos más bajo. Con la codificación **dual**, que pone v en el anillo de pares y $u = (x^2, 1)/|(x^2, 1)|$ en las cuerdas y cubre los 10 estados de peso 2, y con la lectura qg_{ZZ}, el peso 2 alcanza al peso 1: 0,947 = 0,947 (§90). Su ganancia con qang bajo T1 es de 14 a 20 puntos, contra 3 en peso 1.

20.3. Lecturas: qg_Z, qg_{ZZ} y dos canales

La lectura es una función lineal de la distribución del sector, y su rango dice cuánto de esa distribución ve:

Tabla 20.4: Rango de la lectura sobre la distribución del sector (con el término constante).

sector	estados	rango de la lectura qg_Z	rango de qg_Z más qg_{ZZ}
peso 1, 5 qubits	5	5	5
peso 2, 5 qubits	10	5	10

En peso 1 las cinco lecturas m_Z ya determinan la distribución entera, y las correlaciones no agregan nada. En peso 2 las cinco lecturas ven sólo 5 de las 10 direcciones, y hacen falta las correlaciones $qg_{ZZ} = \langle Z_i Z_j \rangle$. Pero el rango no era la causa de la brecha: con la codificación de pares, agregar qg_{ZZ} no cambió nada (§81). Hicieron falta las dos cosas juntas, una codificación que no distorsione y una lectura de rango completo (§90).

Los disparos que decayeron. En §81 hubo un caso en contra de qang: con la codificación de pares, la lectura qg_{ZZ} y entrenando bajo T1, la red sin filtro sacó 1,2 puntos más [0,4; 2,0], porque los disparos que decayeron todavía dicen dónde estaban las excitaciones. La lectura de dos canales (§95), que le da al clasificador las lecturas filtradas y las crudas juntas, no recuperó nada, y con 60 corridas nuevas el efecto bajó a +0,5 [−0,7; 1,6] (§101). Ninguna lectura entrenada bajo T1 le ganó al filtro de forma significativa, y con la lectura simple el filtro fue mejor por 0,6 puntos [0,1; 1,0].

20.4. Simulabilidad clásica: no hay ventaja cuántica

En el sector de peso 1 la red entera es una matriz ortogonal O de $n \times n$. Con $u = Ov$,

$$z = \sum_q c_q \,(1 - 2u_q^2) + b,$$

un clasificador cuadrático en v que se calcula en $O(n^2)$ (§76 F2). El script del capítulo lo comprueba: la salida de la red y la del gemelo cuadrático coinciden a $9 \cdot 10^{-16}$. En peso k el sector tiene dimensión $\binom{n}{k}$, y la red sigue siendo simulable mientras ese número sea manejable. Por eso las notas lo dicen sin rodeos: con datos reales, el mejor modelo clásico iguala o supera a la mejor QNN (§75: RBF-SVM 0,963 contra 0,933 en dígitos), y el gemelo cuadrático bien regularizado queda a 0,3–1,6 puntos de E (§76). **Lo que estas redes ofrecen es robustez en hardware ruidoso, no ventaja cuántica.**

20.5. Escala y multiclase

Con 5, 6 y 8 qubits y profundidad fija de 9 subcapas (§111), el filtro mantiene cada red en su precisión sin ruido. Sin él, la pérdida de peso 1 queda en 3,1–3,4 puntos, pero la de peso 2 crece de 8,7 a 26,0 puntos: una red de 8 qubits y peso 2 cae de 0,965 a 0,705 (Figura 20.2, izquierda). Entrenar bajo el ruido sigue alcanzando al filtro (a menos de 0,9 puntos en cada celda).

En la versión multiclase cada qubit es una clase (`qang.qml.MultiClassQNN`, §110 y §114). Con 8 qubits y 3, 5 y 8 clases de dígitos, el filtro deja cada modelo exactamente en su precisión sin ruido; sin él, la lectura con cabezal lineal pierde 0,7, 15,9 y 11,1 puntos. A diferencia de los 5 qubits, entrenar bajo el ruido ya no alcanza del todo: queda 2–3 puntos atrás con 5 y 8 clases.

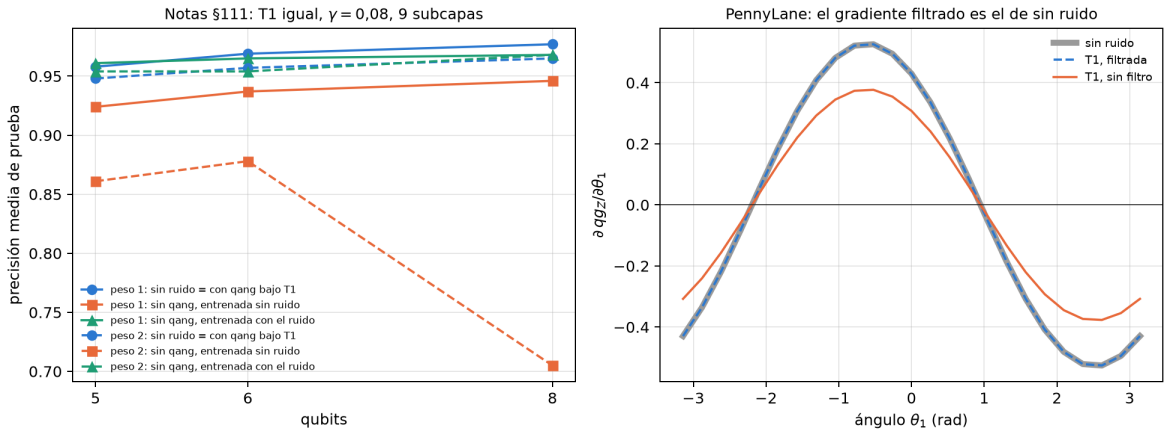


Figura 20.2: Izquierda: precisión media de prueba frente al número de qubits (tabla de las notas, §111), con el filtro bajo T1 (igual a la precisión sin ruido), sin qang y entrenada sin ruido, y sin qang entrenada con el ruido, para peso 1 y peso 2. Derecha: gradiente de qg_Z de un qubit frente al primer ángulo en un circuito de PennyLane de tres qubits con compuertas de Givens y amortiguamiento ($\gamma = 0{,}08$); el gradiente filtrado coincide con el sin ruido, y el crudo es el sin ruido multiplicado por la fracción conservada.

20.6. Entrenar con ruido o con el filtro

Si la lectura filtrada bajo T1 es la sin ruido para cualquier parámetro, también lo son la pérdida y cada gradiente. Por eso entrenar bajo T1 con el filtro da exactamente los parámetros del entrenamiento sin ruido (§77 F3: a $5 \cdot 10^{-9}$ después de 120 pasos de Adam). El script lo comprueba en PennyLane, con compuertas de Givens (`SingleExcitation`) y amortiguamiento en `default.mixed`: el gradiente de la lectura filtrada coincide con el del circuito sin ruido a 10^{-16}, y el de la lectura cruda es el sin ruido multiplicado por $K = 0{,}716393 = (1-\gamma)^4$, componente por componente (Figura 20.2, derecha). En peso 1 el gradiente crudo es K veces más chico; con muchos qubits el sector mismo aplana el gradiente (§112), con filtro o sin él. Lo hace según su dimensión: como un polinomio en peso 1, y como $1/\binom{n}{n/2}$ con media ocupación. Es la meseta por expresividad, y el capítulo 23 la compara con las otras dos (Sección 23.8). El filtro corrige la meseta por ruido T1, pero no esa.

20.7. El ecosistema: Qiskit, qiskit-machine-learning y PennyLane

La red no vive sólo en NumPy. Las notas la llevan a tres entornos:

- **Qiskit.** `qang.interop` lee las lecturas qg de un SamplerV2, y escribe la lectura filtrada como cociente de dos observables diagonales, $\langle P_w Z_i\rangle / \langle P_w\rangle$, para un EstimatorV2 (§131). `qang.ibm.qnn_template` escribe la red de peso 1 como un solo circuito parametrizado de compuertas XX+YY nativas y manda todo un conjunto de prueba en un trabajo (§139).
- **qiskit-machine-learning.** `qang.qiskit_ml.qang_sampler_qnn` convierte la red en un `SamplerQNN` (§140). Las notas encontraron que qiskit-machine-learning 0.9.1 lee los bits medidos en las posiciones físicas del *layout*, de modo que un circuito medido antes de transpilar lee cada disparo como 0; qang transpila por su cuenta y descarta el *layout*.
- **PennyLane.** `qang.pennylane_gate.filtered_qg_z` actúa sobre `qml.probs()` con `qml.math`, así que la lectura filtrada es diferenciable y puede ser la pérdida de un entrenamiento (§131). Al verificarla para este capítulo apareció un problema de PennyLane 0.45.1: en `default.mixed`, el modo `backprop` devuelve NaN en el jacobiano de `qml.probs` a través de `SingleExcitation` (con `RY` funciona, y en `default.qubit` también). La regla del corrimiento de parámetros da el valor correcto.

`qml.math` también abarca la interfaz JAX de PennyLane, pero JAX no está instalado en el entorno del libro, y la lectura filtrada no se probó con ella. Esos dos problemas de librerías y el camino hacia JAX se proponen al final del libro, junto con la nueva versión de qang.

20.8. La codificación qg y el procesamiento cuántico de señales

La codificación de un rasgo $x \in [-1, 1]$ con $\theta = \arccos x$ es la del capítulo 1: el estado tiene $m_Z = 1000\,x$, y el ángulo de la codificación es su ángulo qang (§16). Cargado L veces, el modelo es un polinomio de Chebyshev de grado L ($\cos L\theta = T_L(x)$, comprobado a $7\cdot 10^{-16}$), de modo que L capas ajustan cualquier polinomio acotado de grado L a precisión de máquina y $L-1$ capas no. Es un sesgo inductivo polinomial, no una ventaja: con objetivos periódicos la codificación por ángulo gana por 1,5 a 4,5 órdenes de magnitud.

El mismo giro es la rotación de señal del procesamiento cuántico de señales (QSP), y `qang.qsp` lo construye en términos qg (§134). Como activaciones de una red de

Kolmogorov–Arnold de una capa, el QSP ponderado acierta 179 de 189 entradas, 182 con activaciones pares e impares, contra 185 de la red E de qang (§135–§136): el límite es la paridad de las activaciones, no el número de fases.

20.9. Lo que queda pendiente

Las precisiones de este capítulo son las de las notas, con predicciones registradas antes de correr; no se volvieron a correr aquí, porque el entorno del libro no tiene scikit-learn. Lo que sí se verificó con código es estructural: la exactitud del filtro, la ley de la fracción conservada, los rangos de lectura, el gemelo cuadrático y el gradiente en PennyLane. Falta una corrida en hardware real de una red con el filtro (el capítulo 21 desarrolla el filtro y el 32 la ejecución en dispositivos), y falta probar la lectura filtrada con JAX.

20.10. Sin qang y con qang

Tabla 20.5: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
leer la red bajo T1	todas las lecturas; corren hacia el polo norte (132–506 m-qg de error medio)	sólo el sector: lectura exacta (10^{-12} m-qg)	**a favor**: exactitud por construcción, con T1 igual
saber cuántos disparos cuesta	estimar la pérdida de cada corrida	$K = (1-\gamma)^{kd}$, antes de correr	**a favor**: el costo depende sólo de la profundidad y del T1 calibrado
entrenar en un simulador y correr bajo T1	pierde 2,5 (peso 1) y 16,5 puntos (peso 2)	la precisión sin ruido	**a favor**, decisivo en peso 2 y con más qubits (26 puntos a 8 qubits)
entrenar bajo el ruido calibrado	alcanza al filtro	igual	**ninguna** medible (±1 punto); el filtro ahorra el modelo de ruido y las corridas ruidosas

acción	sin qang	con qang	diferencia
T1 desigual y desfase	—	sesgos de 30–90 m-qg	**en contra** si se ignora: el filtro no los corrige; con desfase hay que entrenar con ruido
gradiente bajo T1	K veces el sin ruido	el sin ruido, exacto	**a favor**: la lectura filtrada es diferenciable en PennyLane
ventaja cuántica	—	—	**ninguna**: la red es un clasificador cuadrático simulable; los modelos clásicos la igualan

Balance. La contribución de qang en este capítulo no es la precisión sino la robustez: el filtro qg hace que el entrenamiento sin ruido siga valiendo bajo T1, exactamente, y dice de antemano cuántos disparos cuesta. Esa ganancia es del filtro de sector, y la base del capítulo 1 la explica: los disparos que decaen corren las lecturas hacia el polo norte. Las redes son conocidas (Landman et al. 2022), son simulables, y con ruido calibrado un entrenamiento consciente del ruido llega al mismo lugar sin qang.

20.11. En código

```
import numpy as np
from qang import qml as QML

m = QML.WeightQNN(n_qubits=5, weight=2, encoding="dual", readout="zz")
rng = np.random.default_rng(0)
psi = m.encode(rng.uniform(-1, 1, size=(3, 4)))
theta = rng.uniform(-np.pi, np.pi, size=m.n_theta)
clean = m.qg_z(m.probs(theta, psi), qang=False)
noisy = m.probs(theta, psi, gamma=0.08)
```

```
np.abs(m.qg_z(noisy, qang=True) - clean).max()  # ~1e-15: el filtro es exacto bajo T1 igu
QML.kept_fraction(0.08, m.weight, m.depth)      # 0.2229 = 0.92**18: el costo, antes de c
```

20.12. Resumen

- En el sector de peso 1 la red es una matriz ortogonal y cada qubit lee $m_Z = 1000(1 - 2u_q^2)$. Bajo T1 igual el filtro qg devuelve la lectura sin ruido exactamente, a un costo $K = (1-\gamma)^{kd}$ conocido antes de correr; sin él, las lecturas corren hacia el polo norte.
- Entrenada en un simulador, la red gana con qang 2,5 puntos en peso 1 y 16,5 en peso 2; entrenada bajo el ruido calibrado, no gana nada medible. El filtro no corrige el T1 desigual ni el desfase.
- El peso 2 alcanza al peso 1 con una codificación que no distorsiona y una lectura de rango completo (qg_{ZZ}).
- La red es un clasificador cuadrático simulable: robustez en hardware ruidoso, no ventaja cuántica.
- En PennyLane el gradiente filtrado bajo T1 es el sin ruido; la verificación dejó dos problemas de librerías (PennyLane y qiskit-machine-learning) y un camino hacia JAX, que se proponen al final del libro.

Notas bibliográficas

Las redes ortogonales con compuertas RBS son Landman et al. (2022). Los núcleos y espacios de características cuánticos son Havlíček et al. (2019) y Schuld y Killoran (2019); la relación entre ausencia de mesetas y simulabilidad clásica, Cerezo et al. (2023). El procesamiento cuántico de señales es Low y Chuang (2017) y Martyn et al. (2021). El ecosistema es Qiskit (Javadi-Abhari et al. 2024), PennyLane (Bergholm et al. 2018) y JAX (Bradbury et al. 2018). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

21 El filtro de simetría qg y la exactitud bajo relajación T1

El capítulo 20 usó el filtro qg como herramienta: descartar los disparos que salieron del sector de peso de Hamming devuelve la lectura sin ruido bajo T1. Este capítulo lo trata como objeto. Primero el teorema y por qué vale, en la escala del capítulo 1. Después lo que cuesta, con una regla cerrada que predice antes de correr cuándo conviene, y lo que no corrige: el T1 desigual entre qubits, el desfase y los errores de compuerta y de lectura. Para cada límite hay una propiedad exacta (F5 y F6 en las notas) que dice cómo seguir. Lo estructural se verifica con código sobre estados al azar; los resultados de clasificación son los de las notas, con predicciones registradas antes de correr.

21.1. Desde la base: el decaimiento empuja las lecturas al polo norte

El amortiguamiento de amplitud de un qubit tiene dos operadores de Kraus:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, \qquad K_1 = \sqrt{\gamma}\,|0\rangle\langle 1|.$$

K_1 es el salto: el qubit cae a $|0\rangle$, y su lectura pasa a $+1000$ m-qg, el polo norte. K_0 es la evolución sin salto: no mueve $|0\rangle$ y multiplica la amplitud de $|1\rangle$ por $\sqrt{1-\gamma}$. En un registro, el producto de los K_0 multiplica cada estado de la base con k unos por $(1-\gamma)^{k/2}$, el mismo factor para todos los estados del sector de peso k. Y cualquier salto baja el peso en uno.

De ahí el teorema (notas, §77 y §78 F4): **con el mismo T1 en todos los qubits, quedarse con los disparos de peso k devuelve el estado sin ruido.** El factor sin salto es un escalar sobre el sector, y al normalizar desaparece; todo lo que saltó está en otro sector. Vale entre capas de compuertas que conservan el peso, para cualquier intensidad y cualquier profundidad. La fracción de disparos que sobrevive es $K = (1-\gamma)^{k\,d}$, con d el número de pasos de amortiguamiento.

Tabla 21.1: El teorema en todos los sectores de 6 qubits: 20 estados al azar, 2 capas de RBS (6 subcapas), $\gamma = 0{,}08$.

sector (6 qubits)	dimensión	$\lvert$filtrada − sin ruido$\rvert$ máx. (m-qg)
peso 1	6	$4 \cdot 10^{-13}$
peso 2	15	$7 \cdot 10^{-13}$
peso 3	20	$6 \cdot 10^{-13}$
peso 4	15	$7 \cdot 10^{-13}$
peso 5	6	$9 \cdot 10^{-13}$

Para un estado de peso 2 con tres pasos de amortiguamiento, la fracción que queda en el sector es 0,606355, exactamente $0{,}92^6$. El filtro es una posselección, y lo que devuelve es una probabilidad condicional: la ecuación del capítulo 1 aplicada dentro del sector.

21.2. Lo que cuesta: la regla del error cuadrático medio

El filtro elimina el sesgo y paga con disparos: con S disparos sólo quedan KS. Las notas (§94) escribieron antes de correr una regla cerrada para el error cuadrático medio de las lecturas m de los qubits:

$$\mathrm{ECM}_{\mathrm{qang}} \approx \frac{1000^2 - m^2}{KS}, \qquad \mathrm{ECM}_{\mathrm{crudo}} = \mathrm{sesgo}^2 + \frac{1000^2 - m_{\mathrm{crudo}}^2}{S}.$$

El primero es el ruido de disparo del capítulo 1 con KS disparos; el segundo suma el sesgo hacia el polo norte, que no baja con más disparos. El script del capítulo lo comprueba con 10 circuitos al azar de 6 qubits, peso 2, 12 subcapas y $\gamma = 0{,}02$ ($K = 0{,}616$), 200 repeticiones por punto:

Tabla 21.2: La regla de §94 contra la simulación (Figura 21.1, derecha).

disparos S	30	100	300	1000	3000	10 000
ECM con qang, simulado / regla	1,05	1,01	1,02	1,00	1,01	1,00

disparos S	30	100	300	1000	3000	10 000
ECM sin qang / ECM con qang	1,3	3,0	7,9	25	74	249

El error crudo se estanca en unos 31 000 m-qg² (un sesgo de unos 175 m-qg), mientras el filtrado sigue bajando como $1/S$. Igualando las dos expresiones sale el número de disparos de equilibrio S^*: por encima, gana el filtro. En los circuitos de este capítulo S^* va de 9 a 61 disparos (Figura 21.2, izquierda); en la grilla de las notas, de 3 a 110 (108 configuraciones hasta 8 qubits, peso 4 y profundidad 24, con hasta 1000 veces menos error con el filtro).

Con muy pocos disparos conservados (§96, 405 configuraciones con K hasta $2{,}6 \cdot 10^{-7}$) la regla generalizada, que incluye el sesgo que queda en la lectura filtrada, elige al ganador en 342 de 342 casos con $KS \geq 5$, también con T1 desigual y desfase. Cuando sobrevive menos de un disparo, el filtro devuelve 0 por falta de datos, y aun así le gana a la lectura cruda en 51 de 57 casos, porque la cruda colapsó hacia $|0 \ldots 0\rangle$, el polo norte, que es peor apuesta que el ecuador. **No apareció un régimen en el que el costo en disparos decida contra el filtro.**

21.3. Entrenar a través del filtro

Como la lectura filtrada bajo T1 igual es la sin ruido para cualquier parámetro, la pérdida y sus gradientes también lo son, y entrenar con ruido filtrado es entrenar sin ruido (§77; el capítulo 20 lo verificó en PennyLane a 10^{-16}). Las notas lo repitieron entrenando desde disparos (§109), con 100 o 1000 disparos nuevos por evaluación y gradientes SPSA:

Tabla 21.3: Red E bajo T1 igual ($\gamma = 0{,}08$, $K = 0{,}47$), entrenada desde disparos (notas §109).

entrenamiento	con qang	sin qang
probabilidades exactas sin ruido	0,945	–
disparos, $S = 1000$	0,939	0,929
disparos, $S = 100$	0,930	0,915

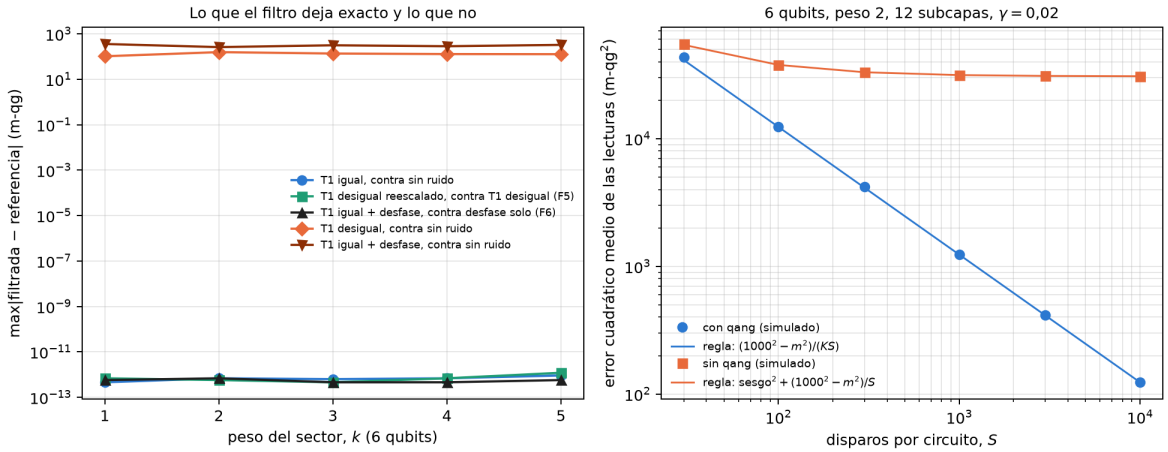


Figura 21.1: Izquierda: desvío máximo de la lectura filtrada respecto de su referencia, por peso del sector (6 qubits), en escala logarítmica. Con T1 igual, con T1 desigual reescalado (F5) y con T1 más desfase contra desfase solo (F6) el desvío es de redondeo; con T1 desigual o con desfase, contra la lectura sin ruido, queda un sesgo de 100 a 360 m-qg. Derecha: error cuadrático medio de las lecturas con y sin el filtro frente a los disparos, simulado (puntos) y de la regla de §94 (líneas).

La predicción era que con 100 disparos el costo del filtro se iba a notar. No se notó: la red entrenada con qang quedó 1,5 puntos adelante (IC [−1,6; 4,6]). El gradiente se aplana con el tamaño del sector, con filtro o sin él (§112).

21.4. F5: el T1 desigual depende sólo de los cocientes

Con un T1 distinto en cada qubit, el factor sin salto ya no es un escalar sobre el sector: es el producto de los $\sqrt{1-\gamma_q}$ de los qubits excitados, distinto para cada estado. El filtro deja entonces un sesgo: 100 a 160 m-qg con una dispersión de ±50 % en los γ_q (Figura 21.1). Pero las notas encontraron una propiedad exacta (§117 F5): **un factor común en todos los $(1-\gamma_q)$ se cancela al normalizar**, así que la lectura filtrada depende sólo de los cocientes $(1-\gamma_q)/(1-\gamma_r)$. El script lo comprueba multiplicando todos los $(1-\gamma_q)$ por 0,85: la lectura filtrada no se mueve más de 10^{-12} m-qg en ningún sector, y la cruda se mueve de 640 a 850 m-qg.

La consecuencia práctica es una receta. Entrenar con el filtro bajo las tasas calibradas necesita sólo los T1 relativos, tolera errores de calibración y sobrevive a una deriva común de todos los T1:

Tabla 21.4: T1 desigual, dispersión 1 (γ_q de 0 a 0,16), notas §117. A: entrenada sin ruido, con el filtro; B: entrenada sin ruido, cruda; C: entrenada con el filtro bajo las tasas calibradas (10 % de error); C*: bajo las tasas exactas; D: entrenada cruda bajo las tasas calibradas. Deriva: todos los T1 1,5 veces más cortos.

peso	sin ruido	A	B	C	C*	D	deriva: A / B / C / D
1	0,950	0,931	0,873	0,951	0,945	0,952	0,913 / 0,770 / 0,942 / 0,950
2	0,945	0,918	0,797	0,940	0,941	0,941	0,903 / 0,663 / 0,932 / 0,841

Con la receta C, la red queda a 0,5 puntos de la precisión sin ruido. Ante la deriva, en peso 2 la red cruda entrenada con ruido pierde 10,0 puntos y la filtrada 0,7:

la cruda aprendió las tasas absolutas, y la filtrada sólo sus cocientes. Si no se quiere entrenar con ruido, la regla de §82 dice cuánto se tolera: con el filtro solo se pierde menos de un punto mientras los $1/T_1$ de los qubits difieran hasta ±80 % de su media.

21.5. F6: el desfase, con el filtro y extrapolación

El desfase no cambia el peso, así que el filtro no lo ve. Pero las notas probaron otra propiedad exacta (§118 F6): **con T1 igual y desfase, la lectura filtrada es la lectura con desfase solo.** El factor sin salto es un escalar sobre el sector y conmuta con el canal de desfase, que es diagonal. El script lo comprueba en todos los sectores de 6 qubits, a $7 \cdot 10^{-13}$ m-qg (Figura 21.1). El filtro convierte dos ruidos en uno, y ese uno se puede extrapolar a cero (ZNE):

Tabla 21.5: ZNE de las lecturas filtradas sobre 40 estados al azar, probabilidades exactas (Figura 21.2, derecha).

lectura (5 qubits, peso 2, T1 0,08 + desfase 0,03)	error medio (m-qg)
cruda	442
filtrada	152
filtrada, extrapolación lineal (escalas 1 y 2)	69 (45 %)
filtrada, Richardson (escalas 1, 2 y 3)	31 (20 %)

En los clasificadores de las notas (§118, §122, a 5 y 8 qubits) la extrapolación lineal deja el 50–58 % del error de las lecturas filtradas y Richardson el 26–35 %; sin el filtro, la ZNE tiene que extrapolar T1 y desfase juntos y queda 3 a 10 puntos atrás. Con 1000 disparos por escala, en peso 2, la ZNE pierde contra el filtro solo, porque su costo en disparos se come la ganancia. Lo que mejor corrige el desfase en un clasificador es otra cosa: entrenar con el filtro bajo el ruido calibrado, que recupera la precisión sin ruido (0,951–0,963).

Una sutileza (§132–§133): el desfase entre compuertas RBS conmuta con el peso y el filtro no lo ve, pero el desfase **dentro** de la descomposición de una RBS en compuertas nativas convierte un error de fase en un cambio de peso. Para predecir la fracción conservada en un dispositivo, el simulador tiene que poner ese error dentro de cada RBS.

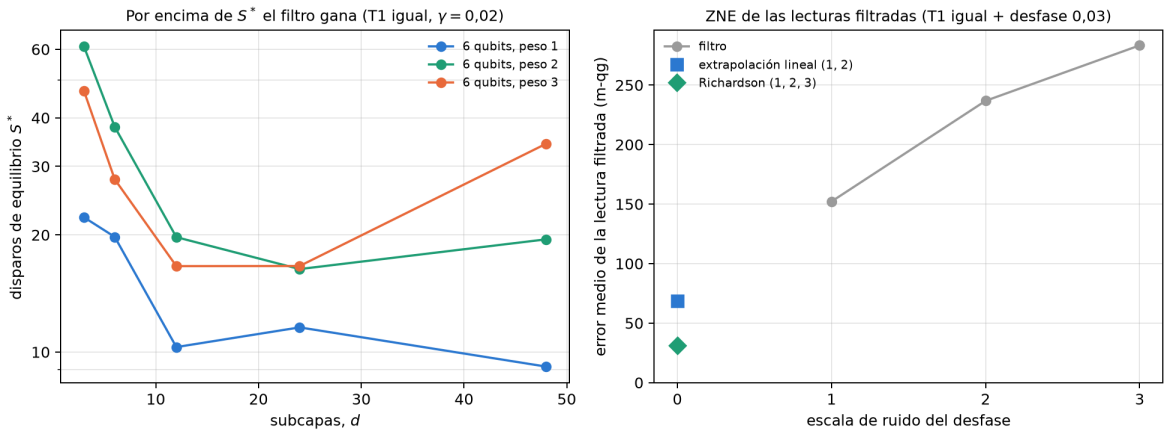


Figura 21.2: Izquierda: disparos de equilibrio S^* de la regla de §94 frente a la profundidad, para los pesos 1, 2 y 3 en 6 qubits ($\gamma = 0{,}02$); por encima de S^* el filtro tiene menos error. Derecha: error medio de la lectura filtrada con T1 igual y desfase 0,03 a las escalas 1, 2 y 3 del desfase, y su extrapolación a cero lineal y de Richardson.

21.6. Errores de compuerta y de lectura

En los modelos de ruido de dispositivos IBM los errores de compuerta dominan, y no son T1. Las notas los agregaron al simulador de qang (§124: un canal despolarizante de dos qubits después de cada RBS, con el error publicado de la compuerta nativa) y después el error de lectura asimétrico de cada qubit (§129). Su interés aquí es uno: predecir la fracción conservada antes de correr.

Tabla 21.6: Fracción conservada de una red de peso 1 en tres modelos de ruido de IBM (notas §124, §129).

dispositivo simulado	K del dispositivo	predicha con T1, T2 y compuertas	+ error de lectura
fake brisbane	0,671	0,703	0,665
fake sherbrooke	0,697	0,774	0,694
fake torino	0,724	0,845	0,783

Con el error de lectura, la predicción cae a 0,006 de la del dispositivo en los dos equipos con compuertas ECR. En torino (compuertas CZ) queda una diferencia de 0,059 que §132–§133 atribuyen al desfase dentro de las compuertas. En precisión, la receta más simple fue la mejor en esos modelos: entrenar sin ruido y correr con

el filtro (182–185 de 189 aciertos, contra 185 sin ruido); entrenar con los errores de compuerta ayudó a la lectura cruda (+1,2 puntos) pero no a la filtrada.

21.7. Lo que queda pendiente

Las propiedades del filtro (el teorema, la ley de K, F5, F6 y la regla del error) están verificadas con código; las precisiones de clasificación son las de las notas. Falta una corrida en hardware real, donde el T1 desigual, el desfase dentro de las compuertas y el error de lectura actúan juntos. Y falta una herramienta en las librerías: la posselección por peso con su regla de costo se propone al final del libro, junto con la nueva versión de qang.

21.8. Sin qang y con qang

Tabla 21.7: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
leer bajo T1 igual	sesgo hacia el polo norte, que no baja con disparos	lectura exacta ($\leq 10^{-12}$ m-qg) en todo sector	**a favor**: exactitud por un teorema
decidir si conviene filtrar	probar las dos lecturas	regla cerrada; el ganador se predice en el 99–100 % de los casos	**a favor**: la decisión se toma antes de correr
costo en disparos	—	$K = (1-\gamma)^{kd}$ exacto; equilibrio a 3–110 disparos	**a favor**: el costo nunca decidió en contra en las grillas de las notas
T1 desigual	la red cruda aprende las tasas absolutas; ante una deriva pierde 10 puntos (peso 2)	depende sólo de los cocientes (F5); entrenar con el filtro queda a 0,5 puntos; deriva: 0,7	**a favor** con la receta; **en contra** si se usa el filtro solo con dispersión grande (hasta 2 puntos)

acción	sin qang	con qang	diferencia
desfase	ZNE de T1 y desfase juntos	el filtro deja sólo el desfase (F6); ZNE lo reduce al 20–58 %	**a favor** en error de lecturas; con pocos disparos la ZNE no paga
errores de compuerta y lectura	—	el simulador predice K a 0,006 (ECR)	**a favor** como predicción; el filtro no los corrige

Balance. El filtro es posselección por simetría, una técnica conocida de mitigación. Lo que agregan las notas son las propiedades exactas (el teorema en todo sector, F5 y F6), la regla cerrada de costo y la receta para cada ruido que el filtro no corrige. La base del capítulo 1 da la imagen: el salto lleva las lecturas al polo norte, y el filtro devuelve la probabilidad condicional al sector. Cuando el ruido no es T1 igual, el filtro deja de alcanzar solo, y la respuesta es entrenar con él bajo el ruido calibrado.

21.9. En código

```
import numpy as np
from qang import qml as QML

m = QML.WeightQNN(n_qubits=6, weight=3, layers=2)
rng = np.random.default_rng(0)
psi = np.zeros((1, m.dim))
psi[0, m.idx[3]] = rng.normal(size=20)
psi /= np.linalg.norm(psi)
theta = rng.uniform(-np.pi, np.pi, size=m.n_theta)
g = 0.08 * (1 + 0.5 * np.linspace(-1, 1, 6))          # T1 desigual
f = lambda gam: m.qg_z(m.probs(theta, psi, gamma=gam), qang=True)
np.abs(f(1 - 0.85 * (1 - g)) - f(g)).max()        # ~1e-15: F5, sólo cuentan los cociente
```

21.10. Resumen

- El salto lleva las lecturas al polo norte y baja el peso; la evolución sin salto multiplica cada estado de peso k por $(1-\gamma)^{k/2}$. Con T1 igual, el filtro

devuelve el estado sin ruido en todo sector, con $K = (1-\gamma)^{kd}$.

- La regla ECM $\approx (1000^2 - m^2)/(KS)$ contra sesgo$^2 + (1000^2 - m^2)/S$ predice antes de correr cuándo conviene filtrar; el equilibrio está en unas decenas de disparos, y el costo nunca decidió en contra.
- Con T1 desigual la lectura filtrada depende sólo de los cocientes de las tasas (F5): entrenar con el filtro bajo las tasas calibradas recupera la precisión y resiste una deriva común.
- Con T1 más desfase el filtro deja sólo el desfase (F6), que se extrapola a cero o, en un clasificador, se corrige entrenando con el filtro bajo el ruido.
- Con los errores de compuerta y de lectura, el simulador de qang predice la fracción conservada de un dispositivo; el filtro no los corrige.

Notas bibliográficas

El filtro qg es una verificación de simetría (Bonet-Monroig et al. 2018; McArdle et al. 2019); la extrapolación a ruido cero es Temme et al. (2017). Los canales de relajación y desfase son los de Nielsen y Chuang (2010). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

22 Calibración por eco y el sesgo de ruido (pull effect)

El filtro qg del capítulo 21 deja exacta la lectura bajo T1 igual, pero no corrige todo. Quedan dos cosas que este capítulo trata. La primera son los errores que conservan el peso y mueven la excitación de un qubit a otro: pasan el filtro, y hay que medirlos aparte, con circuitos de eco. La segunda es lo que hacen los disparos que decayeron en un clasificador sin filtro: no agregan ruido al azar, sino que **arrastran** todas las decisiones hacia una misma clase. Las dos se leen en la escala del capítulo 1, y para las dos el capítulo verifica con código el mecanismo y cita los resultados en modelos de ruido de dispositivos de las notas, con predicciones registradas antes de correr.

22.1. Desde la base: dos errores que el filtro trata distinto

En el sector de peso 1, cada qubit lee $m_Z(q) = 1000(1 - 2p_q)$, con p_q la probabilidad de que la excitación esté en él. Hay dos maneras de equivocarse:

- **Un salto T1** saca el disparo del sector: la excitación desaparece y todos los qubits leen $+1000$, el polo norte. El filtro descarta esos disparos. Sin filtro, la lectura cruda es una mezcla: con probabilidad K la lectura sin ruido, y con probabilidad $1 - K$ el polo norte en todos los qubits.
- **Un error dentro del sector** mueve la excitación de un qubit a otro: el disparo sigue teniendo peso 1, pasa el filtro y cambia las lecturas de dos qubits a la vez. Sobre las probabilidades p_q actúa como una matriz estocástica M.

La primera se corrige descartando; la segunda, invirtiendo M, como se invierte una matriz de confusión de lectura.

22.2. Errores dentro del sector y el eco

Un circuito de eco prepara un estado de la base del sector, $|e_j\rangle$, aplica las compuertas de la red y después sus inversas. Sin errores vuelve a $|e_j\rangle$; con errores, su distribución filtrada sobre los estados del sector es la columna j de una matriz de transferencia M (notas, §105). Como el circuito real tiene la mitad de las compuertas del eco, se corrige con $M^{1/2}$: la distribución filtrada f se desmezcla resolviendo $M^{1/2}x = f$ con $x \geq 0$ (`qang.sectors.unmix_sector`).

El script del capítulo lo prueba con un error dentro del sector controlado: después de cada subcapa, cada par de qubits de una RBS se intercambia con probabilidad p (conserva el peso y mueve la excitación). Cinco qubits, peso 1, 9 subcapas, 60 entradas al azar:

Tabla 22.1: Error medio de las lecturas m_Z (m-qg) con probabilidades exactas.

p	diagonal del eco	error con el filtro	+ eco con $M^{1/2}$	+ eco con M
0,005	0,93–0,94	15,0	5,7 (−62 %)	13,4 (−11 %)
0,01	0,87–0,89	29,4	11,3 (−61 %)	25,5 (−13 %)
0,02	0,76–0,80	56,4	22,4 (−60 %)	47,4 (−16 %)
0,04	0,58–0,65	104,2	43,7 (−58 %)	87,4 (−16 %)
0,08	0,38–0,45	178,8	84,5 (−53 %)	164,3 (−8 %)

$M^{1/2}$ quita algo más de la mitad del error que deja el filtro; M completa corrige de más y quita poco. En los modelos de ruido de dispositivos de las notas, el eco quita el 38–47 % del error filtrado en peso 1 con 5 qubits (§105, cinco dispositivos simulados), el 37–43 % en peso 2 con una matriz de 10×10 (§107) y el 27–38 % en peso 2 con 8 qubits, una matriz de 28×28 (§115). Cuanto más grande el sector, más sucio y más difícil de recuperar: la diagonal del eco baja de 0,77–0,92 a 0,50–0,80. El filtro más el eco queda 3,4 a 7 veces por debajo de la lectura cruda.

22.3. ¿Llega al clasificador?

Con la red de peso 1 sobre 189 entradas de prueba y 1000 disparos (§106), en tres dispositivos IBM simulados y el simulador de IonQ:

Tabla 22.2: La calibración por eco en el clasificador (notas §106; precisión sin ruido 0,979).

dispositivo	precisión (cruda / qang / qang + eco)	decisiones distintas de la sin ruido	error del valor de decisión
fake brisbane	0,968 / 0,974 / 0,979	2 / 1 / 0	1,53 / 0,76 / 0,33
fake sherbrooke	0,963 / 0,974 / 0,979	3 / 1 / 0	1,26 / 0,61 / 0,29
fake torino	0,963 / 0,979 / 0,979	3 / 0 / 0	1,08 / 0,47 / 0,27
IonQ aria-1	0,958 / 0,963 / 0,968	4 / 3 / 2	1,67 / 0,87 / 0,44
IonQ forte-1	0,963 / 0,968 / 0,974	3 / 2 / 1	1,60 / 0,80 / 0,43

El eco reduce entre 43 y 56 % el error del valor de decisión que deja el filtro, y el filtro más el eco queda 3,7 a 4,6 veces por debajo de la lectura cruda. Las decisiones sólo se mueven hacia la red sin ruido: 15 distintas sin qang, 7 con el filtro y 3 con el filtro más el eco, sobre 945 lecturas.

Cuándo no sirve (§108). Con entradas de margen estrecho, el eco no agregó nada (19 decisiones cambiadas contra 17 con el filtro solo). El error del valor de decisión filtrado era de 0,26 a 0,35, apenas por encima de su ruido de disparo (0,22): quedaba poco sesgo, e invertir la matriz suma varianza. La regla de las notas es usar el eco cuando el error filtrado está bien por encima de su nivel de ruido de disparo. En el modelo de este capítulo, con 1000 disparos y 4000 por eco, el eco siguió ayudando incluso con $p = 0{,}005$ (22 → 17 m-qg); con $p = 0$ no cambia nada (15 m-qg, el ruido de disparo puro).

22.4. El arrastre: por qué la pérdida sin qang varía entre semillas

En la red multiclase del capítulo 20, la pérdida sin filtro variaba mucho de una semilla a otra (de −0,7 a 41,7 puntos). Las notas lo explicaron con una propiedad exacta (§121 F7). En peso 1 bajo T1 igual, todo disparo que decae cae en $|0 \ldots 0\rangle$, donde cada qubit lee $+1000$. Como los logits son lineales en las lecturas, los logits crudos son

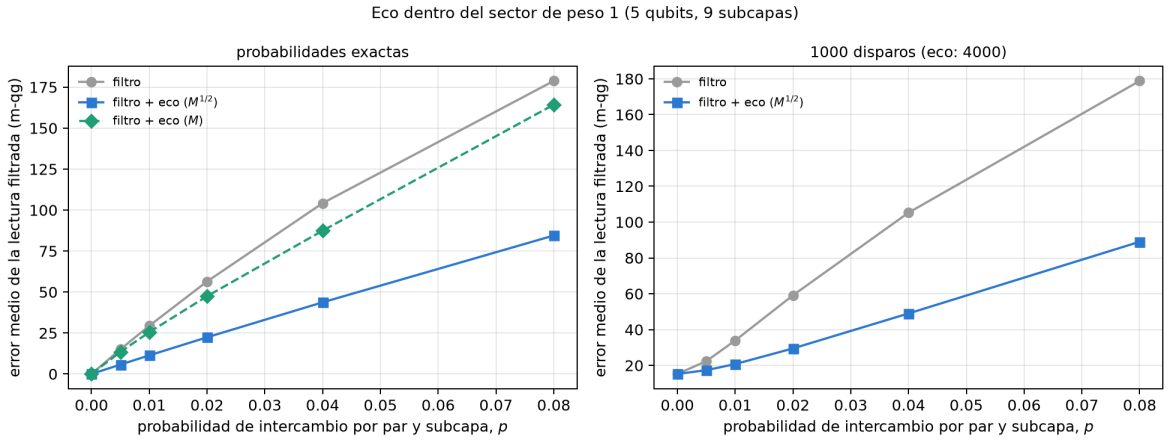


Figura 22.1: Error medio de las lecturas filtradas en un sector de peso 1 con intercambios dentro del sector, frente a la probabilidad de intercambio. Izquierda: probabilidades exactas; el eco con $M^{1/2}$ quita más de la mitad del error y M completa corrige de más. Derecha: con 1000 disparos por circuito y 4000 por eco; en $p = 0$ queda el ruido de disparo.

$$\text{logits}_{\text{crudos}} = K\,L + (1 - K)\,v,$$

con L los logits sin ruido y v los logits del polo norte, un vector constante que fija el entrenamiento (para el cabezal lineal, $v = W^{\top}\mathbf{1} + b$). Sin filtro, cada entrada es arrastrada hacia la clase con el mayor v_c, y cuánto pesa eso lo mide un índice de arrastre: $(1 - K)/K$ por el rango de v, sobre el margen mediano de entrenamiento.

El script lo comprueba en 40 modelos de 5 clases con parámetros al azar ($K = 0{,}472$, 300 entradas cada uno):

- la fórmula de los logits crudos se cumple a $7 \cdot 10^{-15}$;
- sin filtro cambian de 0 a 60 % de las decisiones según el modelo, y el cambio crece con el índice de arrastre (Spearman 0,60; en las notas, 0,65 con el cabezal y 0,98 con la lectura por qubit);
- con el filtro no cambia ninguna.

La dispersión entre semillas no es mala suerte: es el v que dejó el entrenamiento, y se puede leer antes de correr nada.

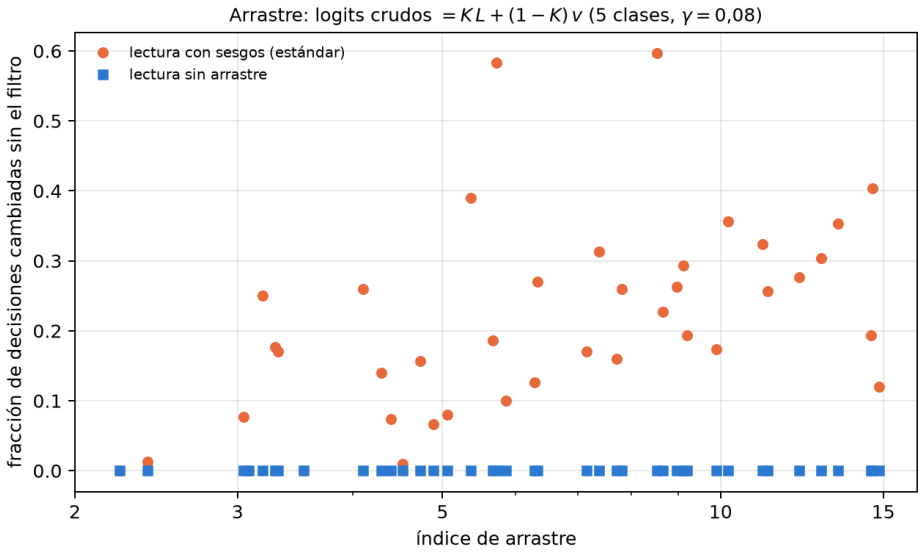


Figura 22.2: Fracción de decisiones que cambian sin el filtro frente al índice de arrastre, para 40 modelos de 5 clases bajo T1 igual. Con sesgos (lectura estándar), el cambio crece con el arrastre; la lectura sin arrastre no cambia ninguna decisión.

22.5. La lectura sin arrastre

Si el arrastre viene de v, se puede eliminar en el diseño: logits lineales en las probabilidades de excitación y sin término constante (para el cabezal, $W^{\top}(qg_Z - 1)$; para la lectura por qubit, $a\,p_c$). Entonces el polo norte aporta cero, los disparos que decayeron sólo reescalan los logits por K, y la decisión cruda es la sin ruido. El script lo comprueba en los 40 modelos: ninguna decisión cambia, y los logits crudos son K veces los sin ruido a $6 \cdot 10^{-15}$. Las notas (§123, 10 semillas, dígitos de 5 clases) lo confirman en precisión:

Tabla 22.3: La lectura sin arrastre (notas §123).

lectura	modelo	sin ruido	T1 (qang / cruda)	T1 desigual (qang / cruda)	1000 disparos (qang / cruda)
por qubit	estándar	0,860	0,860 / 0,725	0,849 / 0,688	0,861 / 0,724
por qubit	sin arrastre	0,862	0,862 / 0,862	0,851 / 0,851	0,863 / 0,863

lectura	modelo	sin ruido	T1 (qang / cruda)	T1 desigual (qang / cruda)	1000 disparos (qang / cruda)
cabezal	estándar	0,932	0,932 / 0,653	0,932 / 0,624	0,927 / 0,651
cabezal	sin arrastre	0,938	0,938 / 0,938	0,928 / 0,928	0,932 / 0,932

Quitar los sesgos no cuesta precisión, y la lectura sin arrastre es inmune al decaimiento sin filtrar: lleva el filtro adentro. Sin filtro, el cabezal sin arrastre queda 28,5 puntos por encima del estándar. Es la imagen del capítulo 1 llevada al diseño: si el polo norte vale cero, caer en él no arrastra.

22.6. Calibrar con el propio dispositivo

Las notas probaron dos maneras más de usar la calibración en los modelos de ruido de IBM (§119, §120): entrenar con qang bajo los T1 y T2 publicados, y medir el dispositivo mismo (con la matriz del eco dentro del modelo, o reajustando la lectura con 40 entradas corridas en el dispositivo). Ninguna le ganó a la receta simple: entrenar sin ruido y correr con el filtro (0,972 de precisión media contra 0,979 sin ruido), más el eco para los valores de decisión. La razón es que en esos modelos dominan los errores de compuerta, y la calibración de T1 y T2 no los describe (los γ por subcapa son de sólo 0,002–0,017).

22.7. Lo que queda pendiente

El mecanismo del eco y la propiedad F7 están verificados con código, y los resultados en dispositivos simulados son los de las notas. Hay un paquete listo para correr la red multiclase con eco en una QPU de IonQ (§116: 55 circuitos, 60 000 disparos, con predicciones registradas antes de enviar nada); su ensayo en el simulador dio 4 decisiones cambiadas con el filtro y 1 con el eco, contra 8 en crudo. La corrida en hardware está pendiente de créditos y de una aprobación explícita del costo.

22.8. Sin qang y con qang

Tabla 22.4: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
errores dentro del sector	invisibles: pasan cualquier filtro de peso	matriz del eco y desmezcla con $M^{1/2}$: −27 a −62 % del error filtrado	**a favor**, con costo: $\binom{n}{k}$ circuitos de eco más
error del valor de decisión	—	−43 a −56 % con el eco sobre el filtro (§106)	**a favor** cuando el error filtrado supera su ruido de disparo; **ninguna** con margen estrecho (§108)
entender la dispersión entre semillas	mala suerte	logits crudos $= KL + (1-K)v$, exacto; el índice de arrastre la predice	**a favor**: el arrastre se lee antes de correr
corregir el arrastre	entrenar con ruido	el filtro lo quita exactamente	**a favor**
diseñar una lectura inmune	—	sin sesgos: el polo norte vale cero, decisiones idénticas con o sin filtro	**a favor**, sin costo en precisión
calibrar con el dispositivo	entrenar con la calibración	igual o peor que entrenar sin ruido + filtro	**ninguna** en esos modelos: dominan los errores de compuerta

Balance. La calibración por eco es mitigación conocida, del tipo de la inversión de matrices de confusión de lectura, aplicada dentro de un sector. Lo que agregan las notas es su alcance medido (cuánto quita según el tamaño del sector) y la regla de cuándo no sirve. El aporte más limpio del capítulo es el arrastre: una propiedad exacta que explica la dispersión entre semillas, y una lectura sin sesgos que la evita sin filtro. Las dos salen de leer el decaimiento como lo lee el capítulo 1: todos los qubits en el polo norte.

22.9. En código

```
import numpy as np
from qang import qml as QML

m = QML.MultiClassQNN(n_qubits=5, n_classes=5, readout="head")
rng = np.random.default_rng(0)
psi = m.encode(rng.uniform(-1, 1, size=(4, 4)))
th = rng.uniform(-np.pi, np.pi, size=m.n_theta)
head = rng.normal(size=m.n_head)
K = QML.kept_fraction(0.08, 1, m.depth)
L = m._logits(m.qg_z(m.probs(th, psi), qang=False), head)
raw = m._logits(m.qg_z(m.probs(th, psi, gamma=0.08), qang=False), head)
v = m._logits(np.ones((1, 5)), head)     # el polo norte: +1000 m-qg en cada qubit
np.abs(raw - (K * L + (1 - K) * v)).max()  # ~1e-15: F7
```

22.10. Resumen

- Un salto T1 lleva todos los qubits al polo norte y saca el disparo del sector; un error dentro del sector mueve la excitación y pasa el filtro. El primero se descarta; el segundo se mide con ecos y se invierte.
- El eco con $M^{1/2}$ quita más de la mitad del error filtrado en el modelo del capítulo y 27–47 % en los dispositivos simulados de las notas; M completa corrige de más. Sirve cuando el error filtrado supera su ruido de disparo.
- Sin filtro, los logits crudos son exactamente $K\,L + (1-K)\,v$: el decaimiento arrastra todas las decisiones hacia una clase, y el índice de arrastre predice cuánto.
- Una lectura sin sesgos hace que el polo norte valga cero: las decisiones crudas son las sin ruido, sin filtrar y sin perder precisión.
- En los modelos de ruido de IBM, entrenar sin ruido y correr con el filtro (y el eco) fue la mejor receta; calibrar con el dispositivo no la mejoró.

Notas bibliográficas

El eco es el de Hahn (1950); la mitigación de errores de lectura, Bravyi et al. (2021). El filtro de sector es la verificación de simetría de Bonet-Monroig et al. (2018). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts

que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

23 Geometría de la información, gradiente natural (QNG) y núcleos

Los capítulos 20 a 22 leyeron en qg lo que sale de un circuito. Este capítulo pregunta por lo que entra: los parámetros que un optimizador mueve. Circula una idea atractiva: si la lectura natural es qg, escribir el circuito en coordenadas qg debería acelerar el gradiente y aplanar el paisaje. El capítulo muestra con código que es al revés, y por qué. La coordenada en la que conviene optimizar es el ángulo qang θ, y qg es la coordenada en la que conviene leer. De esa distinción salen cuatro usos honestos de qang: regularizar la singularidad de los polos, leer la métrica del gradiente natural con correlaciones qg, amortiguar el paso cerca de los polos y escribir un costo local que no se aplana tan rápido. Lo estructural se verifica con código; los resultados con núcleos en modelos de ruido de dispositivos son los de las notas, con predicciones registradas antes de correr.

23.1. Desde la base: el ángulo y la lectura

En el capítulo 1, un qubit preparado con $R_y(\theta)|0\rangle$ lee $m_Z = 1000\cos\theta$ m-qg, y θ es el ángulo qang. Las dos coordenadas describen el mismo estado, pero no son equivalentes para optimizar, porque el cambio entre ellas no es lineal:

$$\frac{d\,qg_Z}{d\theta} = -\sin\theta, \qquad \frac{dE}{d\,qg_Z} = -\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{dE}{d\theta}.$$

En los polos ($m_Z = \pm 1000$) la lectura casi no se mueve cuando θ cambia, y por eso el gradiente en qg diverge. Todo el capítulo es una consecuencia de esa línea.

23.2. La singularidad y sus regularizaciones

El factor $-1/\sin\theta$ vale -10 en $\theta = 0{,}1$, -100 en $0{,}01$ y -1000 en $0{,}001$. Las notas (§1) proponen dos versiones acotadas, en `qang.gradients`:

- **recorte:** $-1/(\operatorname{sign}(\sin\theta)\,\text{máx}(|\sin\theta|,\varepsilon))$, que nunca supera $1/\varepsilon$;
- **Tikhonov:** $-\sin\theta/(\sin^2\theta+\varepsilon^2)$, suave en todas partes y nula en el polo mismo.

Con $\varepsilon = 0{,}05$, en $\theta = 0{,}001$ el factor crudo vale 1000, el recortado 20 y el de Tikhonov 0,40. El script del capítulo repite el experimento de las notas: minimizar $E = -\sin\theta$ (mínimo en $\pi/2$, lejos de los bordes) empezando en el polo, $\theta_0 = 0{,}01$, durante 150 iteraciones.

Tabla 23.1: Descenso desde un polo (notas §1; las cifras del script coinciden con las de las notas).

espacio	tasa	θ final	E final	paso máximo	comportamiento
en θ	0,05	1,5698	−1,0000	0,05	converge a $\pi/2$
en qg, crudo	0,05	3,1416	0,0000	3,14	salta de un polo al otro y no se detiene
en qg, recortado	0,01	1,4184	−0,9884	0,63	converge, más lento
en qg, Tikhonov	0,01	1,4043	−0,9862	0,27	converge, más lento, pasos más chicos

Con la misma tasa que en θ, el descenso crudo en qg nunca se recupera: cada paso enorme cruza al polo opuesto, donde el gradiente vuelve a ser enorme. Las dos regularizaciones lo arreglan, pero piden una tasa unas cinco veces menor (la regla práctica de las notas es tasa $\leq \varepsilon$) y aun así llegan peor que el descenso en θ. Regularizar quita la divergencia; no convierte a qg en una buena coordenada para optimizar.

23.3. El ángulo es la coordenada plana de Fisher

La razón de fondo es estadística. Midiendo en Z, la información de Fisher por disparo es (notas §15.1, §159)

$$F_\theta = 1, \qquad F_{qg} = \frac{1}{1 - qg_Z^2} = \frac{1}{\sin^2\theta}.$$

En el ángulo vale 1 en todas partes; en qg depende de dónde se esté y diverge en los polos. Es la misma $1/\sin\theta$ de la sección anterior, ahora como métrica de Fubini-Study escrita en coordenadas qg. En unidades del capítulo 1, el desvío de la lectura con N disparos es $\sigma_m = 1000\sin\theta/\sqrt{N}$ m-qg (la media muestral alcanza la cota de Cramér-Rao), y el del ángulo estimado es $1/\sqrt{N}$ radianes, igual en todo el círculo. La escala angular qga del capítulo 1 (Sección 1.4) es también una coordenada plana, con $F = 4\pi^2 \cdot 10^{-6}$ qga^{-2} constante: medir el parámetro en qga en lugar de en radianes multiplica el gradiente por una constante y, como se ve más abajo (§12), no cambia la meseta.

El script lo comprueba con 4000 repeticiones de 1000 disparos en 12 ángulos: $\sigma_{qg}\sqrt{N}$ reproduce $\sin\theta$ a la tercera cifra (0,149 contra 0,149 en $\theta = 0{,}15$; 0,995 contra 0,992 en $1{,}70$), y $\sigma_\theta\sqrt{N}$ queda entre 0,98 y 1,05 en todos los puntos (Figura 23.1, izquierda). El ángulo es la coordenada plana: en ella cada paso del optimizador vale lo mismo en cualquier punto.

Una coordenada no ahorra evaluaciones. Para una compuerta $e^{-i\theta G}$ con $G^2 = I/4$, la energía es $E(\theta) = a + b\cos\theta + c\sin\theta$. Una sola evaluación desplazada no alcanza para la derivada: el script construye dos funciones de esa forma que coinciden en $\theta+\pi/2$ ($-0{,}644218$ las dos) y tienen derivadas distintas en θ ($-0{,}644$ y $+0{,}765$). Dos evaluaciones bastan, así que dos por parámetro es el mínimo en cualquier coordenada. En qg se usan los mismos dos números y se agrega el polo.

23.4. El gradiente natural y la métrica qg_YY

El gradiente natural (QNG) (Stokes et al. 2020) corrige el paso con la métrica: $\Delta\theta = -\eta\, g^{-1}\nabla E$. Para un qubit, el paso natural en qg es exactamente el descenso común en θ (notas §15.1): la invariancia ante el cambio de coordenadas hace que escribirlo en qg no agregue nada.

Con varios qubits hay algo que qang sí aporta (§159). En un ansatz real de R_y y CZ, todos los estados del circuito son reales, así que $\langle Y_k\rangle = 0$ antes de cada R_y y **cada entrada diagonal de la métrica vale exactamente 1/4**. Los ángulos son planos uno por uno, y toda la curvatura está fuera de la diagonal. Dentro de una capa, esos términos son $g_{ij} = \langle Y_i Y_j\rangle/4$: correlaciones qg_YY que se leen con un circuito en la base Y por capa. Es la métrica por bloques de Stokes y otros,

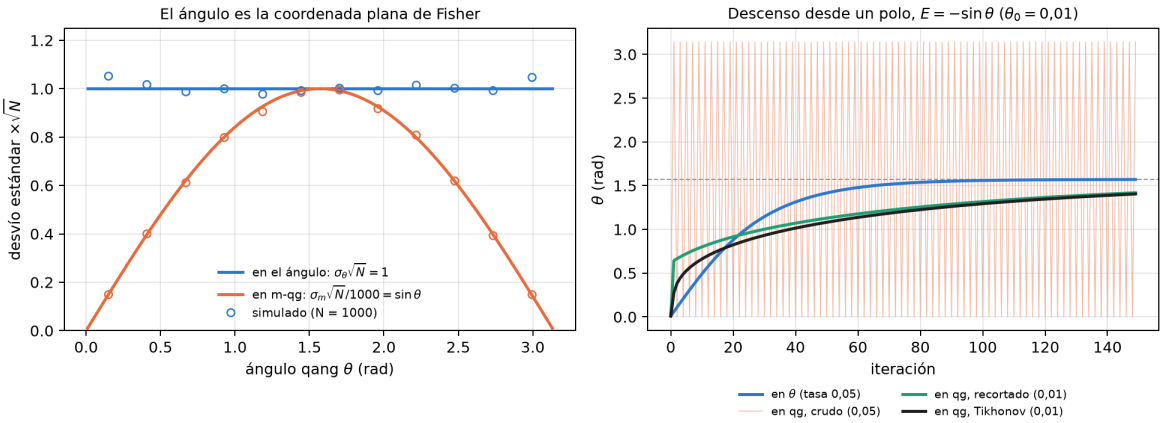


Figura 23.1: Izquierda: desvío estándar por $\sqrt{N}$ de la lectura en m-qg (dividida por 1000) y del ángulo estimado, con 1000 disparos; la lectura sigue $\sin\theta$ y el ángulo queda en 1. Derecha: descenso desde el polo en $E = -\sin\theta$; en qg crudo el optimizador salta entre los polos, y las versiones regularizadas convergen más despacio que en θ.

escrita como lecturas qg. El script lo comprueba en el TFIM de 4 qubits con 3 capas: la diagonal vale 1/4 a $1{,}7\cdot10^{-16}$, los bloques qg_YY coinciden con la métrica completa dentro de cada capa a $1{,}7\cdot10^{-16}$, y fuera de la diagonal hay entradas de hasta 0,248, que es donde actúa la métrica.

El experimento de las notas, con predicciones registradas antes de correr: TFIM de 4 qubits ($h = 1$), 12 parámetros, éxito si $E - E_0 \le 0{,}03$ en 300 pasos (el piso del ansatz es 0,0245), tasa elegida en 6 semillas y 20 semillas de prueba. El script vuelve a correr las 20 semillas de prueba con las tasas guardadas y obtiene las mismas cifras:

Tabla 23.2: Gradiente natural en el TFIM de 4 qubits (notas §159, reproducido por el script).

método	pasos (mediana)	éxitos	tasa
descenso en θ	103	19/20	0,2
descenso en qg (jacobiano recortado)	nunca	0/20	0,005
QNG, bloques qg_YY	79,5	19/20	0,05
QNG, métrica completa	22,5	20/20	0,1

- **El descenso en qg falla** en todas las tasas de la grilla. Se optimiza en el ángulo y se lee en qg.

- **La métrica qg_YY ayuda poco**: 1,3 veces menos pasos que el descenso en θ. La predicción registrada pedía 1,5 y falló. La métrica completa es 4,6 veces más rápida.
- Contando circuitos (24 por gradiente, 3 más para la métrica por bloques y unos 78 más para la completa en hardware), los tres métodos terminan a menos de 15 % uno del otro. Esta cuenta es posterior a la corrida.
- Con 1000 disparos, cada entrada de la métrica qg_YY sale con un error de 0,013 a 0,022.

23.5. El descenso amortiguado en los polos

Si el problema está en los polos, se puede frenar ahí sin salir del ángulo (notas §9):

$$\theta \leftarrow \theta - \eta \ \text{máx}(|\sin\theta|, \varepsilon)\, \frac{dE}{d\theta}.$$

El factor es $|d\,qg_Z/d\theta|$, la misma geometría de la primera sección, y no hay que ajustarlo. Es el paso natural multiplicado por $|\sin\theta|$, que para estos estados reales es también la coherencia $2|\rho_{01}|$: el optimizador va más despacio cuanto menos coherencia le queda al qubit. **No es una clase nueva de optimizador**: es un paso que depende de la posición, del tipo de las regiones de confianza.

El script repite la prueba de robustez: 300 paisajes al azar $E = h_z \cos\theta + h_x \sin\theta$ por tasa, empezando cerca de un polo.

Tabla 23.3: Fracción de éxitos empezando cerca de un polo (300 paisajes por tasa, semilla 0).

tasa	descenso en θ	amortiguado	amortiguado, atrapado
0,3	1,000	1,000	0,000
1	0,773	1,000	0,000
2	0,193	0,440	0,013
3	0,087	0,327	0,017
5	0,043	0,203	0,030
10	0,007	0,093	0,077

Con tasas seguras no cambia nada; con tasa 1 acierta siempre contra 77 %; desde tasa 2 gana de 2,3 a 13 veces, aunque con tasas grandes los dos fallan casi siempre. La fracción que queda atrapada oscilando en su polo crece con la tasa,

hasta 7,7 % en tasa 10. Las cifras difieren algo de las de las notas (§9.2): allí, con tasa 0,3, el amortiguado perdía unos puntos (0,963 contra 0,997), y las ganancias desde tasa 2 eran de 2,5 a 5 veces. El patrón es el mismo; las cifras exactas dependen de los paisajes sorteados.

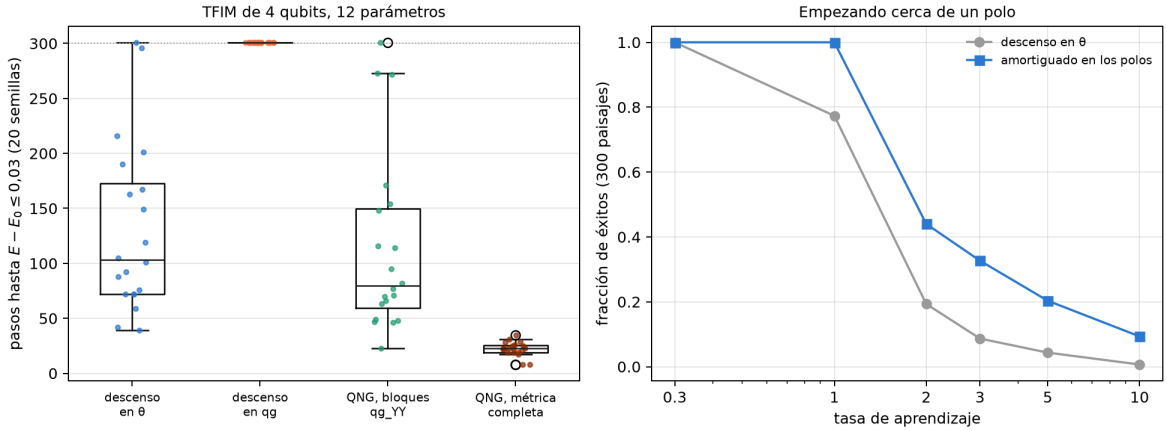


Figura 23.2: Izquierda: pasos hasta $E - E_0 \le 0{,}03$ en el TFIM de 4 qubits para 20 semillas (300 = no llegó); el descenso en qg nunca llega y la métrica completa es la más rápida. Derecha: fracción de éxitos empezando cerca de un polo, con y sin el amortiguado.

23.6. Núcleos cuánticos y el filtro qg

Un núcleo de fidelidad $K_{ij} = |\langle\psi(x_i)|\psi(x_j)\rangle|^2$ estimado en un dispositivo ruidoso sale encogido ($K_{ii} < 1$) y arrastrado hacia el valor del ruido. La reparación habitual, $K_{ij}/\sqrt{K_{ii}K_{jj}}$, cuesta los circuitos de la diagonal. Si el circuito del núcleo conserva el peso de Hamming, el filtro qg del capítulo 21 es otra reparación (notas §161). Con la codificación de peso 1 (un qubit por componente del vector normalizado), el núcleo es $K = (x \cdot y)^2$, y en qg es un ángulo qang: $\arccos(2K - 1) = 2\varphi$, con φ el ángulo entre los dos vectores. El script lo comprueba a $1{,}3 \cdot 10^{-15}$.

El experimento de las notas: datos de cáncer de mama reducidos a 4 componentes más una constante (5 qubits), 40 + 40 puntos, SVM con núcleo precalculado, 2000 disparos y tres modelos de ruido de dispositivos IBM.

Tabla 23.4: El núcleo de peso 1 con el filtro qg (notas §161).

dispositivo	error de la matriz de Gram (cruda / normalizada / filtrada / ambas)	aciertos (exacto 35/40)	diagonal (cruda / filtrada)
FakeBrisbane	0,097 / 0,016 / 0,016 / 0,015	32 / 34 / 34 / 35	0,674 / 0,944
FakeTorino	0,101 / 0,021 / 0,017 / 0,014	34 / 35 / 34 / 34	0,717 / 0,971
FakeFez	0,039 / 0,027 / 0,011 / 0,011	34 / 34 / 35 / 35	0,953 / 1,000

- **El filtro repara mejor la matriz de Gram**: entre 2,4 y 6 veces por debajo de la cruda, y entre 1,0 y 2,5 veces por debajo de la normalización, sin los 80 circuitos de la diagonal. Normalizar después del filtro casi no agrega nada.
- **La precisión casi no lo nota**: una SVM compara valores del núcleo, y un encogimiento común se cancela. La predicción registrada sobre la precisión falló en un núcleo crudo, por tres puntos.
- La alineación núcleo-objetivo no ve el encogimiento, porque divide por $\|K\|$.
- Este núcleo es un polinomio de grado 2, fácil de calcular clásicamente: es una prueba de reparación, no de ventaja.

23.7. Mesetas estériles: costo global contra costo local qg

Con muchos qubits, el gradiente de un circuito al azar se vuelve exponencialmente chico (McClean et al. 2018). Las notas lo miraron en qg dos veces. En §12, pasar el gradiente a qg no cambia nada: la meseta sigue siendo exponencial, la regularización sólo la reescala, y en los polos se le suma la singularidad. **Las dos cosas son independientes y se acumulan.**

En §23, la coordenada sí importa por otro camino: el costo. Se entrena un ansatz para llegar a un estado producto y se comparan dos costos que valen cero sólo en el objetivo: el global, $C_G = 1 - P(0 \dots 0)$, y el local de Cerezo et al. (2021), que en la escala del capítulo 1 es la lectura media del registro, $C_L = (1 - \overline{qg_Z})/2$. El script recalcula la varianza de la derivada respecto del primer parámetro con 200 inicializaciones al azar:

Tabla 23.5: Varianza de $\partial C/\partial p_0$ (200 inicializaciones).

	$n=2$	$n=4$	$n=6$	$n=8$	$n=10$
global, $L=2$	$2{,}7\cdot10^{-2}$	$2{,}5\cdot10^{-3}$	$2{,}5\cdot10^{-4}$	$2{,}6\cdot10^{-5}$	$1{,}2\cdot10^{-6}$
local qg, $L=2$	$1{,}8\cdot10^{-2}$	$3{,}3\cdot10^{-3}$	$1{,}7\cdot10^{-3}$	$9{,}4\cdot10^{-4}$	$5{,}6\cdot10^{-4}$
global, $L=4n$	$2{,}4\cdot10^{-2}$	$1{,}9\cdot10^{-3}$	$1{,}2\cdot10^{-4}$	$6{,}7\cdot10^{-6}$	$5{,}7\cdot10^{-7}$
local qg, $L=4n$	$1{,}6\cdot10^{-2}$	$1{,}9\cdot10^{-3}$	$3{,}4\cdot10^{-4}$	$7{,}3\cdot10^{-5}$	$1{,}7\cdot10^{-5}$

- Con circuitos cortos ($L=2$), el costo local qg decae como un polinomio y el global como una exponencial: en $n=10$ el local tiene 470 veces más varianza (en las notas, 5600 veces en $n=12$), es decir, hacen falta unas 470 veces menos disparos para la misma relación señal-ruido.
- Con circuitos profundos ($L=4n$) **el costo local no cura la meseta**: los dos decaen exponencialmente.
- Con disparos finitos (notas §23, 100 disparos por circuito), el gradiente global sale exactamente cero en 22 % de las inicializaciones con $n=10$ y en 35 % con $n=12$; el local, nunca. Entrenando con $n=10$, el local llega a fidelidad 0,5 en una mediana de 11 pasos contra 20 del global.
- **El control clásico.** Con profundidad L, cada $\langle Z_i\rangle$ depende sólo de los $2L+1$ qubits de su cono de luz, así que el costo local y su gradiente se calculan clásicamente en tiempo $O(n\,2^{2L+1})$. Las notas entrenan así 50 y 100 qubits sin disparos. Donde el costo local qg escapa a la meseta, también es simulable: la ventaja es de entrenamiento, no cuántica.

23.8. Tres mesetas y lo que qang hace con cada una

Una meseta estéril puede venir de tres fuentes distintas, y conviene separarlas porque qang responde distinto a cada una:

- **Expresividad.** Un circuito que explora todo el espacio de 2^n dimensiones tiene gradientes que caen como la inversa de esa dimensión (McClean et al. 2018). La teoría actual lo dice en términos del álgebra de Lie que generan las compuertas (Ragone y otros, 2024): la varianza sigue la dimensión del espacio que el circuito realmente recorre.

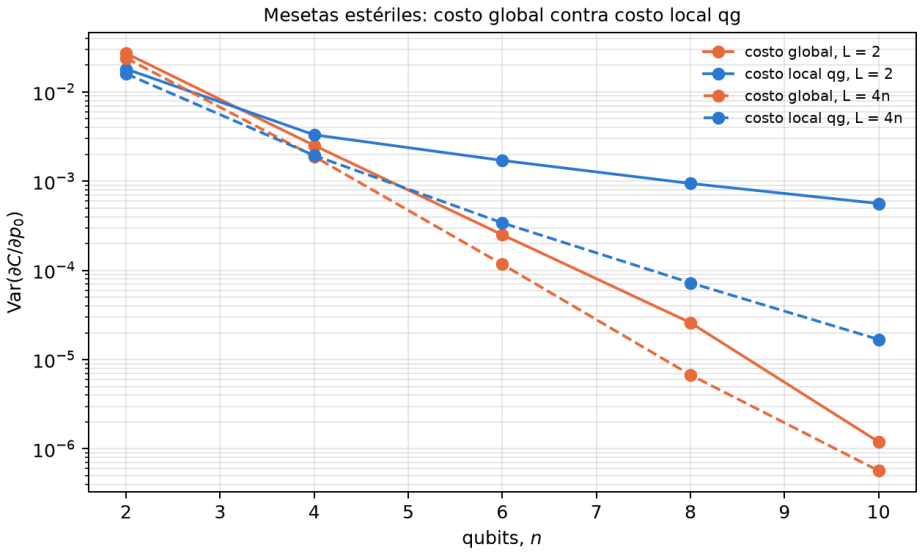


Figura 23.3: Varianza del gradiente frente al número de qubits para el costo global y el costo local qg, con circuitos cortos ($L = 2$) y profundos ($L = 4n$). Sólo el costo local con circuitos cortos escapa al decaimiento exponencial.

- **Costo global.** Un costo que compara todos los qubits a la vez, como la fidelidad, se aplana aunque el circuito sea corto (Cerezo et al. 2021). Es lo de Sección 23.7.
- **Ruido.** El ruido acumulado con la profundidad aplana el paisaje aunque no haya ninguna de las dos causas anteriores (Wang et al. 2021).

La unidad no hace nada. Medir los parámetros en qga o la lectura en m-qg multiplica todas las derivadas por una constante, y no cambia ninguna de las tres (§12; capítulo 1).

Costo global → costo local qg. Es Sección 23.7: escapa a la meseta con circuitos cortos, no con profundos, y donde escapa es simulable con el cono de luz.

Expresividad → un sector de peso. Las redes del capítulo 20 conservan el peso: el circuito nunca sale del sector de peso k, cuya dimensión es $\binom{n}{k}$, no 2^n. El script del capítulo lo comprueba sin ruido, con `qang.qml.WeightQNN`, $2n$ capas, 100 sorteos por punto y la derivada de la lectura qg_Z del qubit 0. Es un cálculo exploratorio: no se registró antes.

Tabla 23.6: Varianza del gradiente sin ruido en la red de peso ($L = 2n$, 100 sorteos).

peso	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 12$	cómo cae
1 (dimensión n)	0,300	0,107	0,041	0,026	0,014	como $n^{-2,8}$: polinomial
$n/2$ (dimensión $\binom{n}{n/2}$)	0,283	0,075	0,012	0,0043	—	varianza × dimensión entre 0,8 y 1,7: exponencial

Con peso 1 la varianza cae 22 veces de 4 a 12 qubits, como un polinomio; con media ocupación sigue a $1/\binom{n}{n/2}$, que crece casi como 2^n (Figura 23.4). La restricción al sector sí evita la meseta, pero sólo cuando el sector es chico, y un sector chico es justamente lo que se simula en una computadora clásica. En peso 1 la red entera es una matriz de $n \times n$, el gemelo cuadrático del capítulo 20 (Sección 20.4). Es el mismo equilibrio que encontró el costo local, y el que describe Cerezo et al. (2023): donde no hay meseta, el problema tiende a ser simulable.

Ruido → el filtro de peso. Bajo T1 igual, el filtro devuelve el gradiente sin ruido exactamente (capítulo 20, §112 T1). Sin el filtro, en peso 1 el gradiente crudo es K veces más chico, con $K = (1-\gamma)^{k\,d}$ la fracción conservada, que cae exponencialmente con la profundidad d: es la meseta por ruido. El filtro no la regala. Cambia una varianza K^2 veces más chica por una fracción K de disparos útiles, de modo que el costo en disparos pasa de crecer como $1/K^2$ a crecer como $1/K$. En las notas, el filtro resolvió el signo del gradiente con menos disparos en 10 de 12 casos. Con media ocupación y $K \leq 0{,}14$ necesitó entre 1,3 y 2,2 veces más (§112, la predicción T5 falló). Con desfase o errores de compuerta dentro del sector, el filtro no devuelve el gradiente sin ruido (capítulos 21 y 22).

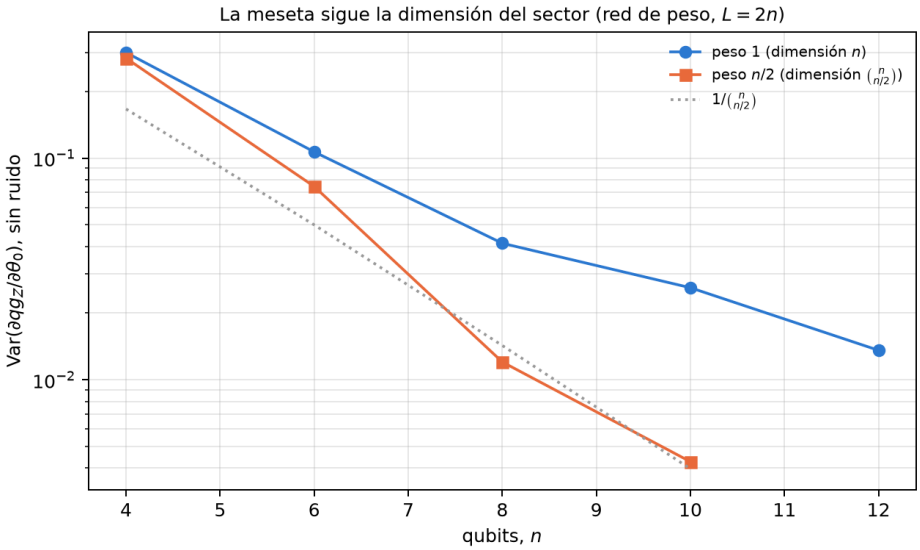


Figura 23.4: Varianza del gradiente sin ruido de la red de peso frente al número de qubits. Con peso 1 (sector de dimensión n) cae como un polinomio; con media ocupación sigue a la inversa de la dimensión del sector (línea punteada), que crece casi como 2^n.

Tabla 23.7: Las tres mesetas y qang.

origen de la meseta	sin qang	con qang	alcance
expresividad	ansatz de todo el espacio	sector de peso k, dimensión $\binom{n}{k}$	sin meseta en peso 1, pero simulable; con media ocupación, meseta
costo global	fidelidad	costo local $(1-\overline{qg_Z})/2$	sólo con circuitos cortos, simulables por el cono de luz
ruido (T1)	gradiente K veces más chico	filtro: gradiente exacto con una fracción K de los disparos	disparos de $1/K^2$ a $1/K$; no corrige desfase ni errores dentro del sector
unidad	radianes	qga, m-qg	ninguno

23.9. Lo que queda pendiente

Todo lo de este capítulo es sin ruido o en modelos de ruido. El gradiente natural de §159 se probó con gradientes exactos en un solo modelo chico; falta medir la métrica qg_YY con disparos en hardware y ver si la ventaja de 1,3 veces sobrevive al ruido de disparo de la métrica. El núcleo filtrado se probó con un núcleo pequeño y fácil, sin la concentración exponencial que aparece con más qubits.

23.10. Sin qang y con qang

Tabla 23.8: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
optimizar los parámetros	descenso en el ángulo	descenso en qg: diverge en los polos y falla (0/20)	**en contra**: se optimiza en θ, se lee en qg
regularizar cerca de los polos	—	recorte o Tikhonov sobre $1/\sin\theta$	**ninguna** frente a no usar qg: sólo repara el problema que qg crea
entender por qué	métrica de Fubini-Study	$F_{qg} = 1/(1-qg_Z^2)$: la singularidad de qg es la métrica; $\sigma_m = 1000\sin\theta/\sqrt{N}$	**a favor** como lectura: explica el fallo y da el error de cada lectura
contar evaluaciones del gradiente	2 por parámetro	2 por parámetro	**ninguna**: ninguna coordenada baja de dos
métrica del gradiente natural	métrica por bloques (Stokes y otros)	la misma, leída como correlaciones qg_YY; diagonal exactamente 1/4	**ninguna** en el método; **a favor** en la lectura: un circuito por capa

acción	sin qang	con qang	diferencia
paso cerca de los polos	tasa fija	amortiguado por $\lvert \operatorname{sin} \theta \rvert$, sin ajuste	**a favor** con tasas agresivas (2,3 a 13 veces más éxitos desde tasa 2); cuesta poco o nada con tasas seguras
reparar un núcleo ruidoso	normalizar por la diagonal	filtro qg en circuitos de peso fijo	**a favor**: Gram 1,0 a 2,5 veces mejor sin los circuitos de la diagonal; **ninguna** en precisión
costo de entrenamiento	fidelidad global	costo local $(1 - \overline{qg_Z})/2$	**a favor** con circuitos cortos (470 veces más varianza en $n = 10$); **ninguna** con circuitos profundos
meseta por expresividad	ansatz de todo el espacio	sector de peso	**a favor** en peso 1 (varianza polinomial), pero ahí es simulable; **ninguna** con media ocupación
meseta por ruido (T1)	gradiente K veces más chico	filtro de peso: gradiente exacto	**a favor**: disparos de $1/K^2$ a $1/K$; **en contra** en 2 de 12 casos de §112 con $K \leq 0{,}14$

Balance. El capítulo es, en buena parte, una corrección: qg no es una coordenada para optimizar, y la geometría de Fisher dice exactamente por qué. Lo que queda a favor de qang no es una coordenada sino una lectura: la métrica del gradiente natural como correlaciones qg_YY, el amortiguado como $\lvert d\, qg_Z/d\theta \rvert$, el núcleo como un ángulo qang reparado por el filtro y el costo local como la lectura media del registro. Son resultados conocidos (Stokes y otros, Cerezo y otros) escritos en la escala del capítulo 1, más dos ganancias medidas: la reparación del núcleo con el filtro y la robustez del amortiguado.

23.11. En código

```
import math
import numpy as np
from qang import fisher as F
from qang import gradients as GR

F.fisher_theta(1.0), F.fisher_qg(math.cos(1.0))     # 1 en el ángulo; 1/sin^2(1) = 1,41
GR.inverse_jacobian_raw(0.001)                    # -1000: la singularidad
GR.inverse_jacobian_tikhonov(0.001)                  # -0,40: regularizada
th = np.random.default_rng(0).uniform(0, 2 * np.pi, 12)
B = F.block_metric(th, 4, 3)                           # bloques qg_YY / 4
G = F.full_metric(th, 4, 3)                          # Fubini-Study completa
np.diag(G)                                              # todas 0,25
np.abs(B[:4, :4] - G[:4, :4]).max()                # ~1e-16 dentro de la capa
```

23.12. Resumen

- En la escala del capítulo 1, $dE/d\,qg_Z = -(1/\sin\theta)\,dE/d\theta$ diverge en los polos. El descenso crudo en qg salta de polo a polo; el recorte y Tikhonov lo arreglan, pero convergen más lento que el descenso en θ.
- La información de Fisher es 1 en el ángulo y $1/(1-qg_Z^2)$ en qg: el ángulo qang es la coordenada plana. Se optimiza en θ y se lee en qg, con $\sigma_m = 1000\sin\theta/\sqrt{N}$ m-qg.
- Ningún cambio de coordenada baja de dos evaluaciones por parámetro.
- En un ansatz real, la diagonal de la métrica vale exactamente 1/4 y los bloques son correlaciones qg_YY. La métrica por bloques ayuda poco (1,3 veces); la completa, 4,6 veces; contando circuitos, los tres métodos quedan a menos de 15 %.
- El amortiguado por $|\sin\theta|$ no es un optimizador nuevo, pero resiste tasas agresivas empezando cerca de un polo.
- El filtro qg repara la matriz de Gram de un núcleo de peso fijo mejor que la normalización y sin sus circuitos; la precisión casi no cambia.
- El costo local qg escapa a la meseta sólo con circuitos cortos, y ahí también es simulable clásicamente.
- De las tres fuentes de meseta, qang responde a dos con herramientas: el sector de peso contra la expresividad (sin meseta en peso 1, que es simulable) y el filtro contra el ruido T1 (gradiente exacto, disparos de $1/K^2$ a $1/K$). La unidad no cambia ninguna.

Notas bibliográficas

La geometría de Fisher es Braunstein y Caves (1994), y el gradiente natural, Amari (1998) y, en circuitos cuánticos, Stokes et al. (2020). El descenso amortiguado es el de Levenberg (1944) y Marquardt (1963). Los núcleos cuánticos son Havlíček et al. (2019) y Schuld y Killoran (2019); las mesetas estériles, McClean et al. (2018) y Cerezo et al. (2021); las inducidas por ruido, Wang et al. (2021), y su relación con la simulabilidad, Cerezo et al. (2023). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte VIII

VIII. Dinámica de muchos cuerpos, canales abiertos, materia y química

24 Simulación hamiltoniana, caminatas cuánticas y VarQTE

Simular la evolución de un sistema cuántico es la aplicación más natural de una computadora cuántica, y es también donde el filtro qg del capítulo 21 llega más lejos: muchos hamiltonianos de la física conservan el número de excitaciones, y sus circuitos de Trotter también. Entonces el peso de Hamming de cada disparo es un testigo gratuito, y el filtro se aplica a todos los observables que se leen en Z. Este capítulo recorre la evolución en el tiempo en la escala del capítulo 1: cadenas XY y XXZ, una caminata cuántica, canales de ruido como mapas de las lecturas, evolución variacional a profundidad fija y, más brevemente, ecuaciones diferenciales, Hubbard, una teoría de gauge, coherencia en Ising y máquinas de Boltzmann. Lo estructural se verifica con código; los resultados en modelos de ruido de dispositivos son los de las corridas registradas de las notas, leídos de sus archivos guardados.

24.1. Desde la base: conservar N es tener un filtro

En la escala del capítulo 1, cada qubit lee $m_Z = 1000(1-2p)$, con p la probabilidad de que esté excitado. El número de excitaciones de un disparo es su peso de Hamming, y la lectura media del registro lo cuenta: $N = \sum_i (1 - qg_{Z,i})/2$. Si el hamiltoniano conserva N y cada compuerta del circuito también, todo disparo con el peso equivocado tuvo un error, y el filtro lo descarta (capítulo 21).

Con una sola excitación, el estado vive en n amplitudes, una por qubit: la excitación salta entre qubits vecinos. Es una **caminata cuántica de tiempo continuo**, y la lectura de cada qubit dice dónde está el caminante.

24.2. Trotter y la caminata cuántica en la cadena XY

La cadena XY con campos, $H = J\sum_k (X_kX_{k+1}+Y_kY_{k+1})/2+\sum_k h_kZ_k/2$, conserva N, y su circuito de Trotter de primer orden usa sólo R_Z y compuertas XX+YY, que también lo conservan (notas, §147).

Cuántos pasos. Más pasos de Trotter bajan el error de Trotter y suman ruido, así que en un dispositivo el error tiene un mínimo en un número de pasos r^*. Sin ruido, con $n = 5$, campos al azar y $T = 3$, el script recalcula el error de Trotter: 0,381, 0,363, 0,221, 0,140, 0,078, 0,054 y 0,033 con 1, 2, 3, 4, 6, 8 y 12 pasos. En los 21 modelos de ruido de dispositivos IBM de las notas, el filtro (más la corrección de lectura) bajó el mejor error a la mitad (mediana 0,147 → 0,067; de 1,6 a 2,8 veces según el dispositivo) y llevó r^* de 8 a 12 pasos en la mediana: **el filtro deja usar circuitos más profundos**. En 11 dispositivos el óptimo fue 12, el más profundo probado.

La caminata. Con $n = 7$ y el caminante en el centro, la varianza de su posición $\sigma^2(t)$ crece como t^2 en una caminata cuántica (balística) y como t en una clásica (difusiva). El script lo calcula con la evolución exacta en el sector de peso 1:

Tabla 24.1: $\sigma^2(t)$ de la caminata en 7 qubits; el exponente es la pendiente de $\log \sigma^2$ contra $\log t$.

t	0,4	0,8	1,2	1,6	exponente
caminata cuántica exacta	0,320	1,278	2,832	4,759	1,96
con los pasos de Trotter	0,327	1,291	2,832	4,737	1,94
caminata clásica, misma tasa	0,791	1,513	2,113	2,585	0,86

En los dispositivos simulados, **los datos crudos parecen una caminata clásica**: exponente mediano 0,87, porque el ruido desparrama al caminante desde el principio. **Con el filtro vuelve a ser balística**: exponente mediano 1,84, y σ^2 queda a menos de 20 % del valor exacto en los cuatro tiempos en 15 de 21 dispositivos (crudo: ninguno). La predicción registrada pedía exponente de al menos 1,5 en 18 dispositivos y se cumplió en 16: falló. Los cuatro más ruidosos quedaron entre 1,26 y 1,38, y FakeKyoto en cero.

24.3. Varias excitaciones: la cadena XXZ

La cadena XXZ agrega una interacción $V\, Z_k Z_{k+1}/4$: las excitaciones interactúan y todo sigue conservando N. Aquí la compilación importa (notas §60). El script mide, con matrices densidad exactas ($n = 6$, 4 pasos), qué parte del error del desbalance quita el filtro con una fuente de ruido por vez:

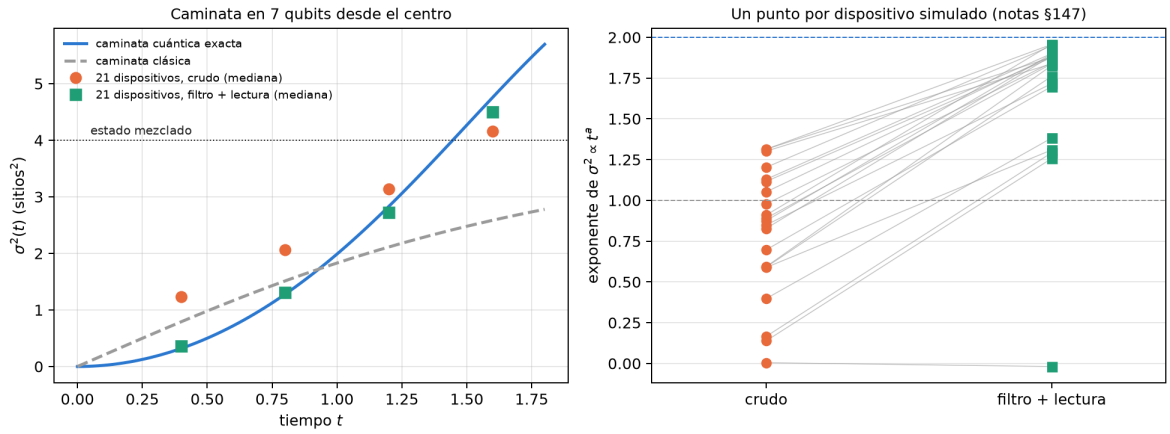


Figura 24.1: Izquierda: $\sigma^2(t)$ de la caminata en 7 qubits; la exacta es balística, la clásica difusiva; las medianas de 21 dispositivos simulados quedan cerca de la clásica sin filtro y de la exacta con él. Derecha: exponente de $\sigma^2 \propto t^a$ por dispositivo, crudo y con filtro más lectura (notas §147).

Tabla 24.2: Parte del error que quita el filtro en la cadena XXZ (notas §60, recalculado por el script).

ruido	3 CNOT por enlace	compuertas que conservan N
despolarizante de 2 qubits, 0,01	41,1 %	41,1 %
amortiguamiento de amplitud (T1), 0,01	48,5 %	99,5 %
desfase en Z, 0,01	1,6 %	0,0 %
lectura, 0,02	93,8 %	—

- **El T1 se filtra a través de los CNOT.** Cada decaimiento baja N, y el filtro lo detecta si el estado está en el sector cuando ocurre. Dentro de un enlace de tres CNOT los estados intermedios no están en el sector, y un decaimiento a mitad de compuerta puede volver a $N = n/2$ y pasar. Con compuertas que conservan N en todo momento, el filtro quita el 99,5 %.
- El desfase en Z no cambia N, y el filtro no lo ve.
- Con ruido mezclado, filtro más ZNE queda entre 2,6 y 8 veces por debajo del mejor método solo hasta 4 pasos (§60).

En los 21 dispositivos IBM simulados con $n = 6$ (§148), la ganancia del filtro baja de 5,6 veces con una excitación a 2,6 con dos y con tres: los sectores con más excitaciones conservan más disparos, pero más ruido cae dentro de ellos. La predicción de que el filtro nunca empeora falló en uno de 63 casos (FakeKyoto a

mitad de llenado). En el modelo de ruido de IonQ forte-1 (§61), el filtro quitó la mitad del error en las dos compilaciones XY, con un cociente de 0,82 entre ellas, dentro de la banda registrada: en iones atrapados, sin T1 dominante, la fuga de los CNOT no aparece.

24.4. Los canales como mapas afines de las lecturas

Un qubit es $\rho = (I + r \cdot \sigma)/2$ con $r = (qg_X, qg_Y, qg_Z)$. Todo canal con operadores de Kraus actúa como $r' = Mr + c$ (notas §162, `qang.channels.bloch_affine`): **las lecturas después de cualquier ruido son afines en las de antes**. El script lo comprueba en 800 estados al azar a $2{,}8 \cdot 10^{-16}$. En la escala del capítulo 1:

- amortiguamiento de amplitud γ: $m_Z \to (1-\gamma)m_Z + 1000\gamma$, y m_X, m_Y se multiplican por $\sqrt{1-\gamma}$ (con $\gamma = 0{,}3$: 0,7 y 0,837);
- desfase: no toca m_Z; despolarizante: multiplica las tres lecturas por el mismo número y conserva el ángulo qang;
- relajación T1/T2 durante t: $m_Z \to e^{-t/T_1} m_Z + (1 - e^{-t/T_1})(1 - 2p_1) \cdot 1000$ y $m_{X,Y} \to e^{-t/T_2} m_{X,Y}$ (con $t = 0{,}5$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0{,}8$: 0,6065 y 0,5353, que son $e^{-0{,}5}$ y $e^{-0{,}625}$).

Es la imagen del capítulo 1 llevada al ruido: cada canal mueve el punto de lectura dentro de la esfera con una regla lineal.

24.5. Evolución variacional a profundidad fija

Trotter crece con el tiempo: más tiempo, más pasos, más compuertas. La evolución variacional (VarQTE, principio de McLachlan) fija el circuito y cambia sólo sus ángulos (notas §162). Con un ansatz que conserva el peso (6 capas de RBS y R_Z, 54 parámetros, 48 compuertas de dos qubits), el filtro sigue valiendo. La integración es clásica; el dispositivo prepara y lee el estado. El script recalcula la fidelidad sin ruido de los ángulos guardados por la corrida de las notas (cadena XXZ, $n = 5$, $V = 2$, dos excitaciones): 0,9999, 0,9956, 0,967 y 0,934 en $t = 0{,}5$, 1, 1,5 y 2, iguales a las guardadas.

Tabla 24.3: VarQTE contra Trotter en tres modelos de ruido (notas §162).

dispositivo	error filtrado en $t = 2$: variacional / mejor Trotter (72 compuertas)	error variacional, $t = 0{,}5 \to 2$
FakeBrisbane	0,036 / 0,076	0,052, 0,030, 0,030, 0,036
FakeTorino	0,030 / 0,042	0,034, 0,022, 0,012, 0,030
FakeFez	0,022 / 0,032	0,017, 0,008, 0,005, 0,022

En tiempos largos gana la profundidad fija, en los tres dispositivos, aunque su fidelidad sin ruido sea sólo 0,934 (la predicción de que pasaría 0,95 falló). El error variacional queda plano y el del mejor Trotter crece de 2,6 a 11 veces. Antes de $t \approx 1$ gana un Trotter corto. Límite: con $n = 5$ todo es trivial clásicamente, y en hardware la integración pediría circuitos de métrica y gradiente en cada paso. El ansatz vive en el sector de peso 2 de 5 qubits, de dimensión 10: por eso no tiene meseta estéril, y por la misma razón es trivial clásicamente (Sección 23.8).

24.6. Ecuaciones diferenciales

Un circuito de un qubit con recarga de datos puede resolver una ecuación diferencial: $u(x) = u_0 + s(f(x) - f(0))$ con $f = \langle Z \rangle$, entrenado sobre el residuo (notas §22). La pregunta de qang es cómo codificar x: en el ángulo, o con arc cos, para que x sea una lectura qg. Resultado de las notas: **qg gana con claridad en el decaimiento exponencial** (2,3, 17 y 6,6 veces mejor que la mejor escala de ángulo con 2, 3 y 4 capas) y **no gana en general**: en la logística el ángulo es unas 2 veces mejor, y en el seno 25 veces. qg no tiene escala que ajustar; el ángulo sí (con escala π falla en todo). El control clásico, colocación de Chebyshev con tantos coeficientes como parámetros, resuelve todo a 10^{-7} o mejor. El resultado dice qué codificación usar, no que el circuito le gane a un método clásico.

24.7. Hubbard y una teoría de gauge: filtros de simetría en todos los observables

Hubbard 1D (notas §29): 4 sitios en 8 qubits, con un registro para cada espín. El hamiltoniano conserva $N_\uparrow$ y $N_\downarrow$, así que cada registro tiene lectura media cero en

todo momento, y todos los observables (desbalance de carga, doble ocupación) están en Z. El script lo comprueba sin ruido: lectura media 0 en los dos registros y fracción conservada 1 en 1, 2, 4 y 8 pasos. En las notas, los filtros reducen el error aproximadamente a la mitad en un dispositivo sin enrutamiento, y ZNE más filtros de espín da la mejor doble ocupación (6 a 9 veces por debajo de la cruda). En la red heavy-hex, el enrutamiento crea fugas de espín (de 8 a 47 % de los disparos con el N correcto caen en el sector de espín equivocado), y ahí el segundo filtro paga. Desde 4 pasos todo queda en el piso de ruido.

Gauge $\mathbb{Z}_2$ en red (§66): 4 sitios de materia y 3 enlaces. La ley de Gauss G_j es un producto de Z, así que es la lectura qg de una paridad: los mismos disparos en Z dan los testigos locales de Gauss y tres filtros (N, Gauss y ambos). El script comprueba que sin ruido cada $\langle G_j \rangle$ vale exactamente ± 1 y no se pierde ningún disparo. En las notas, con 2 pasos, el filtro de Gauss quita más que el de N (80 contra 64 % con ruido despolarizante) y los dos juntos, 90 %. Bajo T1, 58–65 %: la misma fuga de los CNOT. Los testigos locales no ubican los errores en este modelo homogéneo. La post-selección por la ley de Gauss es conocida; lo que agrega qang es leerla como qg de paridades en los mismos disparos.

24.8. Coherencia en el Ising de campo transversal

La diferencia entre la entropía en la base Z y la entropía del estado es una medida conocida: la entropía relativa de coherencia $C(\rho)$ (Baumgratz et al. 2014). Necesita la entropía del estado, que los conteos no dan. Las notas (§34) proponen una cota con dos lecturas por qubit:

$$C \geq \sum_i \left[qg_S(qg_{Z,i}) - qg_S(|r_i|) \right], \qquad |r_i| = \sqrt{qg_{X,i}^2 + qg_{Y,i}^2 + qg_{Z,i}^2}.$$

El script la evalúa en estados térmicos del anillo de Ising de 6 qubits en 20 puntos (β de 0,25 a 3, campo g de 0,25 a 2): **capta entre 92,3 y 99,8 % de la coherencia** (Figura 24.2, derecha). La cota de un solo qubit capta 15–17 % (1/6 de la suma, por simetría), y la cota por entropías de base es inútil: llega a $-5{,}9$ bits. Con 1000 disparos la cota se lee con ±0,04 bits. Donde falla: en un estado de grafo cada qubit reducido es $I/2$ y la cota da 0 con $C = 6$ bits. Lo ajustado es una propiedad de estos estados térmicos, no una ley.

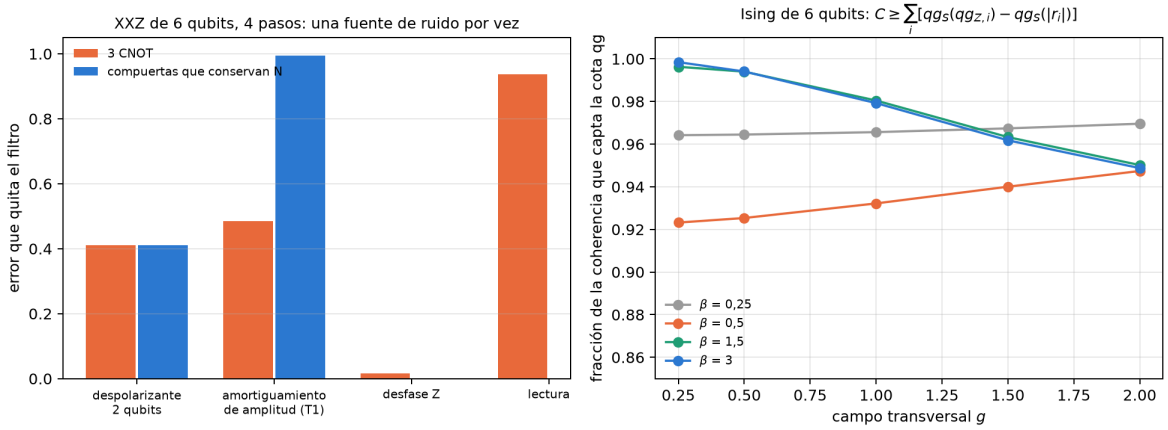


Figura 24.2: Izquierda: parte del error del desbalance que quita el filtro en la cadena XXZ, una fuente de ruido por vez; bajo T1 los CNOT dejan pasar la mitad y las compuertas que conservan N casi nada. Derecha: fracción de la coherencia de estados térmicos de Ising que capta la cota qg.

24.9. Máquinas de Boltzmann: el plano I–η

Una revisión reciente (Singh et al. 2026) mira cada par visible–oculto de una RBM por dos números: la covarianza η y la información mutua I, que caen entre dos cotas $LB(\eta)$ y $UB(\eta)$, y observa que las RBM entrenadas quedan sobre LB. En qg (notas §47), un par de espines queda fijado por tres números, qg_v, qg_h y η, y el script verifica: LB es exactamente el caso de marginales nulas ($2{,}2 \cdot 10^{-16}$) y el mínimo de I a η fija; UB es el par trabado con $|qg_v| = |qg_h| = \sqrt{1-\eta}$ ($2{,}9 \cdot 10^{-15}$). Entre las dos, a orden principal, $I - LB \approx \eta^2 (qg_v^2 + qg_h^2)/(2 \ln 2)$; con $\eta = 0{,}2$–$0{,}4$ la fórmula queda 10–14 % por encima del valor exacto, porque es de orden principal también en η.

La explicación: el conductor de Ising tiene simetría $\mathbb{Z}_2$, una RBM simétrica tiene marginales nulas, y entonces cae sobre LB por simetría, no por un principio de aprendizaje. La predicción, que podía fallar, se cumplió: un campo longitudinal saca al mismo aprendiz de LB en la medida que fijan las marginales.

24.10. Lo que queda pendiente

Ningún resultado de este capítulo corrió en hardware. Las tres cosas más claras para probar en una QPU son la caminata filtrada (§147, el cambio de exponente

de 0,87 a 1,84), la fuga de T1 a través de los CNOT (§60, que en un simulador de iones no aparece) y VarQTE a profundidad fija contra Trotter en tiempos largos (§162).

24.11. Sin qang y con qang

Tabla 24.4: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
simular dinámica que conserva N	lectura cruda o ZNE	filtro de peso sobre todos los observables en Z	**a favor**: mejor error 1,6–2,8 veces menor y circuitos más profundos (§147)
distinguir caminata cuántica de clásica	σ^2 crudo: exponente 0,87, parece clásica	filtrado: 1,84 (exacto 1,96)	**a favor**: el filtro recupera la física
elegir la compilación	CNOT	compuertas que conservan N: el filtro quita 99,5 % del T1 contra 48,5 %	**a favor** en plataformas con T1; **ninguna** en iones (§61)
varias excitaciones	—	ganancia 5,6 veces con una, 2,6 con dos o tres	**a favor**, decreciente con N
describir un canal	matrices de Kraus	$r' = Mr + c$ sobre las lecturas	**ninguna** en el contenido (es la representación de Bloch); **a favor** en la lectura
evolución en tiempos largos	Trotter que crece	VarQTE a profundidad fija con filtro	**a favor** después de $t \approx 1$; **en contra** antes
codificar una EDO	ángulo con escala	$\arccos$, sin escala	**a favor** en decaimiento exponencial; **en contra** en otras; un método clásico gana a todos

acción	sin qang	con qang	diferencia
Hubbard y gauge	post-selección conocida	testigos y filtros como qg de paridades, de los mismos disparos	**a favor** en costo (sin circuitos extra); la idea es conocida
acotar la coherencia	entropías de base: inútil (−5,9 bits)	cota qg con dos lecturas por qubit: 92–100 %	**a favor** en estos estados; **ninguna** en estados de grafo
plano I–η de una RBM	principio de aprendizaje	las cotas son las marginales qg; la saturación es simetría	**a favor**: explica y predice

Balance. La mayor parte de lo que gana este capítulo es del filtro de peso, no de la escala: conservar N convierte cada disparo en un testigo, y eso recupera una caminata balística, deja usar circuitos más profundos y hace que la compilación importe. Lo propio de qang es la lectura: canales como mapas afines de m_X, m_Y, m_Z, testigos de Gauss como qg de paridades, una cota de coherencia con dos lecturas por qubit y las cotas de la RBM como marginales. Las ganancias que dependen de la escala misma (la EDO) son parciales, y el capítulo lo dice.

24.12. En código

```
import numpy as np
from qang import channels as CH

M, c = CH.bloch_affine(CH.amplitude_damping(0.3))
np.diag(M), c              # (0,837, 0,837, 0,7) y (0, 0, 0,3): m_Z -> 0,7 m_Z + 300
r = np.array([0.2, -0.1, 0.5])    # (qg_X, qg_Y, qg_Z)
CH.qg_after(CH.amplitude_damping(0.3), r)   # = M @ r + c
```

24.13. Resumen

- Si el hamiltoniano y las compuertas conservan N, el peso de cada disparo es un testigo y el filtro alcanza a todos los observables en Z.

- En la cadena XY, el filtro baja el mejor error a la mitad y lleva el óptimo de Trotter a circuitos más profundos; la caminata cruda parece clásica (exponente 0,87) y la filtrada es balística (1,84; exacto 1,96).
- Bajo T1, los CNOT dejan pasar la mitad del error y las compuertas que conservan N casi nada (99,5 % quitado).
- Todo canal es un mapa afín de las lecturas; VarQTE a profundidad fija gana en tiempos largos.
- Ecuaciones diferenciales, Hubbard, gauge, coherencia en Ising y RBM: el filtro y las lecturas qg ayudan donde el capítulo lo mide, y donde no ayudan lo dice.

Notas bibliográficas

La fórmula de producto es Trotter (1959) y Suzuki (1991), y la simulación cuántica universal, Lloyd (1996). La caminata cuántica es Aharonov et al. (1993); la evolución variacional, McLachlan (1964) y Yuan et al. (2019). Los generadores de canales markovianos son Lindblad (1976) y Gorini et al. (1976), y el modelo de Hubbard, Hubbard (1963). La medida de coherencia es Baumgratz et al. (2014), y el plano I–η de las RBM, Singh et al. (2026). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

25 Espectroscopía cuántica, PCA y química molecular

El capítulo 24 usó la conservación del número de excitaciones para filtrar dinámica. Este hace lo mismo con espectros y con moléculas, donde el número que se conserva es el de electrones. La lectura media del registro, en la escala del capítulo 1, cuenta los electrones de cada disparo; si el circuito los conserva, ese número es a la vez un testigo de error sin referencia y un filtro. El capítulo sigue esa idea desde un PCA de datos hasta moléculas de 12 qubits, y muestra también dónde deja de alcanzar: cuando el error vive en términos que no se miden en Z. Lo estructural se verifica con código; los resultados en modelos de ruido son los de las corridas registradas de las notas.

25.1. Desde la base: contar electrones con la lectura del registro

En la codificación de Jordan-Wigner cada qubit es un espín-orbital, y su ocupación es $(1-qg_Z)/2$, es decir $(1000-m_Z)/2000$ en m-qg. Sumando sobre el registro,

$$N_e = \sum_i \frac{1 - qg_{Z,i}}{2}, \qquad \overline{qg_Z} = 1 - \frac{2N_e}{n}.$$

Para cualquier circuito que conserve el número de electrones, la lectura media ideal se sabe antes de correr (0 para H_2: 2 electrones en 4 qubits). Que se aparte es un testigo de que el hardware agregó o quitó electrones (el T1 la empuja hacia $+1$), y disparo por disparo es un filtro. **El filtro es la verificación de simetría conocida** (Bonet-Monroig et al. 2018; McArdle et al. 2019); lo que agrega qang es el testigo y su lectura.

25.2. PCA en el sector de peso 1

El PCA cuántico diagonaliza $\rho = C/\operatorname{tr} C$. En la codificación unaria, una mezcla de los vectores de datos cargados (con pesos $|x_j|^2$) es exactamente ese ρ, y un circuito de RBS que aplica la rotación del PCA deja el autovalor λ_k en el qubit k (notas §146). El script lo comprueba con estados exactos: para 5 componentes y 16 datos, la probabilidad de excitación de cada qubit es el autovalor normalizado (0,640, 0,203, 0,122, 0,023, 0,011) a $2{,}2 \cdot 10^{-16}$, con 10 RBS en la rotación. Todas las compuertas conservan el peso, así que el filtro se aplica. No es la aceleración del PCA cuántico (5 componentes usan 5 qubits y la rotación se calcula clásicamente): es una prueba de qué tan bien lee un dispositivo un espectro conocido.

En los 21 modelos de ruido de dispositivos IBM de las notas, con las cuatro predicciones registradas cumplidas, la estimación cruda sale sesgada hacia arriba: los disparos que salen del sector agregan excitaciones en todos los qubits (error L1 mediano 0,266). El filtro más la corrección de lectura la baja a 0,048 (4,6 veces menos; de 1,6 a 7,7 según el dispositivo) y ordena bien los cinco autovalores en 18 de 21 dispositivos (crudo: 13). Lo que queda es un aplanamiento del espectro que crece cuando se conservan pocos disparos (FakeKyoto conserva 15 % y falla).

25.3. H_2: el testigo y el filtro

El script verifica la estructura sobre el hamiltoniano de H_2 de las notas (STO-3G, 0,735 Å, 4 qubits): conmuta exactamente con N, con $N_\uparrow$ y con $N_\downarrow$; el ansatz que conserva N llega a la energía exacta (FCI) a $5 \cdot 10^{-11}$ mHa, y la lectura media ideal del registro es 0. Hartree-Fock queda 20,3 mHa por encima. Las notas (§21) corrieron el modelo de ruido de fake brisbane con 20 000 disparos y una espera antes de medir que amplifica el T1:

Tabla 25.1: Error de la energía de H_2 contra FCI, en mHa (notas §21).

método	0 µs	20 µs	50 µs
Hartree-Fock clásico	20,3	20,3	20,3
cuántico, crudo	74	140	231
+ corrección de lectura	18	90	188
+ lectura + filtro qg	**5,5**	**20**	**30**
testigo: lectura media (ideal 0)	+0,011	+0,057	+0,122
disparos conservados	91 %	83 %	72 %

El testigo sube a medida que se pierden electrones. Con el filtro, la energía es 3,2 veces mejor que con la corrección de lectura sola sin espera (6 veces con 50 µs) y 3,7 veces mejor que Hartree-Fock, pero sigue 3,4 veces por encima de la precisión química: el resto está en los 4 términos de tipo XXYY, que un filtro en Z no alcanza, y en errores que conservan N. FCI es exacto y barato a este tamaño: la tabla mide lo que la corrección compra a un cálculo cuántico ruidoso, no una ventaja.

Filtros por espín (§28). El hamiltoniano conserva $N_\uparrow$ y $N_\downarrow$ por separado, y cada registro de espín tiene su propia lectura media. Un segundo filtro gratuito, con los mismos disparos: con ruido despolarizante quita 34–37 % más del error que deja el filtro total, pero en fake brisbane la ganancia queda dentro de la dispersión entre semillas (6,5 → 5,9 mHa), porque la fuga de espín es menor que 1 %. El testigo de fuga dice cuándo vale la pena.

25.4. Por qué el filtro ayuda a H_2 y no a LiH

Con LiH (6 qubits) el filtro de §21 no hizo nada. Las notas (§50) separaron las causas: alcance (el filtro actúa sólo sobre los disparos en Z), enrutamiento y profundidad.

Tabla 25.2: Dónde está el error, en mHa contra el circuito sin ruido (notas §50).

caso	compuertas 2q	grupo Z crudo → filtrado	grupos X/Y crudos	total crudo → filtrado
H_2, todos con todos	3	13,0 → 4,9	0,9	13,9 → 5,9
H_2, brisbane	6	20,6 → 2,8	2,4	23,0 → 5,2
LiH, todos con todos, 1 capa	20	−2,2 → −1,9	26,2	24,0 → 24,3
LiH, brisbane, 3 capas	60	−30,5 → −18,0	165,8	135,3 → 147,9

La razón principal es el alcance. En H_2 el error está en el grupo Z, donde el filtro actúa; en LiH está en los 16 grupos X/Y, donde un filtro en Z no mira, y ni un filtro perfecto bajaría de esa columna. El enrutamiento no es la causa: el ansatz de LiH es de vecinos cercanos y pide las mismas compuertas en un dispositivo todos con todos. El intento de qang de reescalar los grupos X/Y con la fracción conservada falló: corrige de más 2–3 veces, porque el ruido local de compuertas no es un despolarizante global.

25.5. Verificaciones que alcanzan todos los grupos

Si el problema es el alcance, la solución es una verificación que conmute con todos los términos (§52): la paridad del número de electrones en un ancilla (6 CNOT), y N módulo 4 con un segundo ancilla, que atrapa también los errores que cambian N en 2. Con LiH de 3 capas y ruido todos con todos, paridad más módulo 4 bajan el error de 83,9 a 13,4 mHa (la mejor marca de §50 era 76,6), descartando 28 % de los disparos: por primera vez en el repositorio, LiH queda (en ese modelo) por debajo de Hartree-Fock. En el modelo de IonQ forte-1 (§53) la verificación módulo 4 sobrevive (3,8 veces menos error, la paridad sola 1,25 veces), pero el resultado queda por encima de Hartree-Fock.

Moléculas más grandes (§54, §55, §69), con proyecciones ideales:

Tabla 25.3: La escalera de verificaciones, error en mHa contra el circuito sin ruido (notas §69).

molécula	qubits	crudo	N	$N_\uparrow$, $N_\downarrow$	$+ S^2 = 0$
H_2O	8	363,9	54,6	43,3	26,7
H_4	8	287,5	79,9	70,5	44,7

- Las verificaciones de número siguen funcionando hasta 12 qubits, pero **alcanzan una parte cada vez menor** del error: la parte que cambia N baja de 92 % (LiH, 60 CX) a 67 % (H_6, 132 CX). El resto conserva N y ninguna verificación de número lo ve.
- Separar por espín recupera parte (de 75,7 a 66,8 mHa en H_4).
- **La proyección sobre el singlete $S^2 = 0$ quita 37–38 % más**, la mayor ganancia desde §52, pero S^2 no es diagonal en Z: pide medir 640 cadenas de Pauli para el proyector y 2064–3456 para el proyector por H, contra 105–185 para H.

Λ como tercer filtro (§153). Una molécula lineal conserva Λ, la proyección del momento angular orbital sobre el eje. Con los orbitales π escritos como π± ($m_l = \pm 1$), Λ es diagonal y se verifica disparo por disparo con sólo los cuatro qubits π, así que alcanza 29 de los 317 grupos de medición de LiH (10 qubits), contra 1 del filtro de número. La predicción registrada se cumplió a medias: **donde $N_\uparrow, N_\downarrow$ ya se aplica, Λ no agrega casi nada** (13,9 → 13,3 mHa en FakeBrisbane), porque cambiar Λ sin cambiar N pide dos errores. **El alcance extra es real y no paga**: en los 28 grupos donde sólo actúa Λ, descarta 4–10 % de los disparos y su error casi no se mueve, porque el error que importa ahí está en los qubits σ medidos en X/Y.

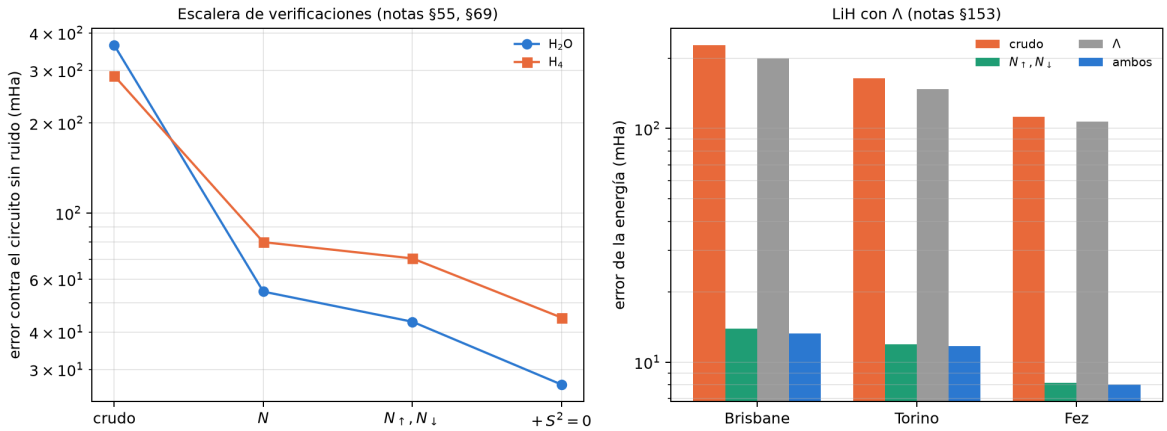


Figura 25.1: Izquierda: escalera de verificaciones en H_2O y H_4 (notas §55 y §69); cada simetría quita una parte menor. Derecha: LiH de 10 qubits con el filtro de espín, el de Λ y ambos, en tres modelos de ruido (notas §153); Λ solo apenas mueve el error.

25.6. Solapamientos: test de inversión contra swap test

La fidelidad $F = |\langle x|y\rangle|^2$ de dos estados unarios se puede estimar de dos maneras (§149). El **test de inversión** carga x, deshace el cargador de y y lee la probabilidad de un estado de la base: 5 qubits, todo conserva el peso. El **swap test** usa 11 qubits y un ancilla, y lee $P(\text{ancilla} = 0) = (1 + F)/2$. El script comprueba las dos fórmulas con estados exactos ($3 \cdot 10^{-16}$ y $6 \cdot 10^{-16}$). En seis modelos de ruido IBM:

- con el filtro, el test de inversión baja su error de 3,8 a 11,2 veces, hasta 0,010–0,036;
- en el swap test la respuesta está en el ancilla, fuera de la simetría, y el filtro gana sólo 1,4–1,8 veces (error 0,089–0,239);
- un clasificador por fidelidad (40 flores) conserva su precisión sin ruido con los dos métodos, porque comparar dos fidelidades cancela el encogimiento común;
- pero la prueba "¿son iguales?" necesita el valor absoluto: para estados idénticos el test de inversión filtrado lee 0,92–1,00 y el swap test crudo 0,20–0,65.

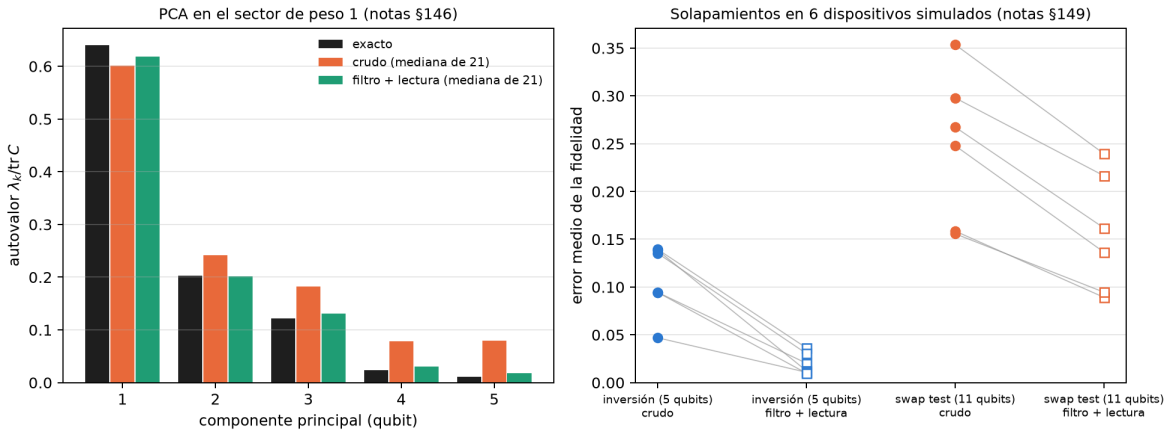


Figura 25.2: Izquierda: espectro del PCA, exacto y mediana de 21 dispositivos simulados sin filtro y con filtro más lectura (notas §146); el crudo levanta los autovalores chicos. Derecha: error de la fidelidad en seis dispositivos, test de inversión y swap test, crudo y filtrado (notas §149).

25.7. Optimización con restricciones: QAOA con "exactamente K"

Elegir exactamente K de n vértices es la misma identidad que el número de electrones: $\overline{qg_Z} = 1 - 2K/n$, 0,25 para $K = 3$ de $n = 8$ (notas §30). El script comprueba que con el mezclador XY (que conserva el peso, desde un estado de Dicke) la distribución ideal es 100 % factible con ángulos al azar, mientras que el QAOA con penalización deja entre 10 y 45 % de masa factible. En un dispositivo todos con todos, el filtro duplica la probabilidad de encontrar el óptimo del mezclador XY (0,150 → 0,278 con $p = 1$; 0,177 → 0,366 con $p = 2$), y en los modelos de IonQ también (1,8–2,6 veces, §38). En fake brisbane, con el enrutamiento, todo cae al nivel de elegir un conjunto factible al azar, y la fracción conservada lo avisa (0,24–0,33, cerca de 0,22 para un registro mezclado). **El clásico gana**: un algoritmo voraz llega al 98,5 % del óptimo. Los ingredientes qg mejoran QAOA frente a QAOA, no frente a la optimización clásica.

25.8. Lo que queda pendiente

Ningún resultado de este capítulo corrió en hardware. Las notas dejaron registrado un criterio para LiH con la verificación módulo 4 en una QPU de IonQ (§53:

vale si paridad más módulo 4 bajan el error al menos 2,5 veces en cada corrida y la paridad sola menos de 1,5), con un costo estimado de unos 1100–2200 dólares, que no entró en el presupuesto.

25.9. Sin qang y con qang

Tabla 25.4: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
leer un espectro PCA	crudo: sesgado hacia arriba (L1 0,266)	filtro de peso: L1 0,048	**a favor**: 4,6 veces menos error; es del filtro
detectar pérdida de electrones	comparar con una referencia	lectura media del registro, ideal conocida	**a favor**: testigo sin referencia
energía de H_2	corrección de lectura: 18 mHa	+ filtro: 5,5 mHa	**a favor**: 3,2 a 6 veces; la verificación de simetría es conocida
energía de LiH con filtro en Z	—	no mejora: el error está en X/Y	**ninguna**: el testigo diagnostica, el filtro no alcanza
reescalar X/Y con la fracción conservada	—	corrige de más 2–3 veces	**en contra**
verificaciones con ancilla	paridad: un tercio	+ N mod 4: 6–8 veces menos error	**a favor**, con 1–2 ancillas; es extensión de lo conocido
moléculas más grandes	—	la parte alcanzable baja de 92 a 67 %	**a favor**, decreciente
filtro de Λ	—	alcanza 29 grupos más y no paga	**ninguna** donde ya hay filtro de espín
fidelidad absoluta	swap test crudo: 0,20–0,65 para estados iguales	inversión filtrada: 0,92–1,00	**a favor** del test de inversión filtrado

acción	sin qang	con qang	diferencia
QAOA con restricción	penalización: nivel de azar	mezclador XY + filtro: duplica el éxito	**a favor** frente a QAOA; **en contra** frente al voraz clásico

Balance. Como en el capítulo 24, casi todo lo que se gana es de la verificación de simetría, que es conocida. Lo propio de qang es el testigo: la lectura media del registro dice cuántos electrones hay, y su fracción conservada dice cuánto queda para filtrar. Ese testigo fue lo que llevó del fracaso de §21 con LiH al diagnóstico de alcance de §50 y a las verificaciones de §52. El capítulo deja también los límites medidos: el error que conserva todas las simetrías crece con el tamaño, y una simetría más (Λ) puede alcanzar más grupos sin bajar el error.

25.10. En código

```
import numpy as np
from qiskit.quantum_info import Statevector
from qang import ibm

x = np.array([0.3, -0.5, 0.2, 0.7, 0.4])
y = np.array([0.1, 0.6, -0.3, 0.5, 0.5])
x, y = x / np.linalg.norm(x), y / np.linalg.norm(y)
sv = Statevector(ibm.unary_overlap_circuit(x, y, measure=False)).data
abs(sv[1]) ** 2, (x @ y) ** 2    # test de inversión: P(sólo el qubit 0 excitado) = F
```

25.11. Resumen

- En Jordan-Wigner, la lectura media del registro cuenta los electrones: $\overline{qg_Z} = 1 - 2N_e/n$. Su valor ideal se conoce antes de correr, así que es un testigo sin referencia y, disparo por disparo, un filtro.
- En el PCA unario, el filtro baja 4,6 veces el error del espectro leído; en H_2, entre 3,2 y 6 veces el de la energía.
- En LiH el filtro en Z no alcanza el error, que está en los grupos X/Y; verificaciones con ancilla (paridad y N mod 4) sí, y bajan el error 6–8 veces.

- Con moléculas más grandes, cada simetría alcanza una parte menor del error; S^2 quita 37–38 % más con muchas más mediciones, y Λ agrega alcance sin bajar el error.
- El test de inversión filtrado da la fidelidad absoluta; el swap test crudo no. En QAOA con restricción, el filtro duplica el éxito del mezclador XY, y un algoritmo clásico sigue ganando.

Notas bibliográficas

El PCA cuántico es Lloyd et al. (2014). La transformación de Jordan–Wigner es Jordan y Wigner (1928); el VQE, Peruzzo et al. (2014), O'Malley et al. (2016) y Kandala et al. (2017), con integrales de PySCF (Sun et al. 2018). La verificación de simetría es Bonet-Monroig et al. (2018) y McArdle et al. (2019). El swap test viene de Buhrman et al. (2001), y el QAOA y sus mezcladores, de Farhi et al. (2014) y Hadfield et al. (2019). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte IX

IX. Corrección de errores, síndromes continuos y caracterización

26 Corrección de errores y síndromes continuos

La corrección de errores protege un qubit lógico repartiéndolo en varios físicos y midiendo síndromes: paridades que dicen qué error ocurrió sin tocar la información. En la escala del capítulo 1, cada síndrome es la lectura qg de una paridad, un número entre -1000 y 1000 m-qg que se puede promediar y seguir en el tiempo. Este capítulo usa esa lectura para cuatro cosas: elegir el código según cuánto T1 y cuánto desfase tiene el dispositivo, seguir la deriva del ruido con los síndromes mismos, decodificar el código de superficie sabiendo que el T1 deja ceros, y decidir dónde cortar un circuito. Lo de capacidad de código (síndromes perfectos, una ronda) se verifica con código; los resultados a nivel de circuito, con qutrits, con qubits de borrado y en modelos de dispositivos son los de las corridas registradas de las notas.

26.1. Desde la base: el síndrome es una lectura qg

Un estabilizador como Z_0Z_1 vale $+1$ o -1 en cada disparo; su promedio es qg de la paridad, y la tasa de síndromes no triviales es $(1-qg)/2$, la misma ecuación de probabilidad del capítulo 1. Los dos ruidos de un qubit en reposo se leen con dos experimentos (notas §27): preparar $|1\rangle$ y medir Z da $qg_Z = -1+2\gamma$ (el amortiguamiento, T1), y preparar $|+\rangle$ y medir X da $qg_X = \sqrt{1-\gamma}\,(1-2p)$ (el desfase, T_φ). Invertirlos da γ y p, y con ellos se decide qué código conviene.

26.2. Qué código conviene bajo T1 y desfase

En capacidad de código, con una ronda de amortiguamiento γ y desfase p en cada qubit, el script recalcula la infidelidad lógica exacta de cuatro opciones: sin código, el código de repetición contra inversión de bit, el de inversión de fase, y el código de 4 qubits de Leung et al. (1997), hecho para el T1.

Tabla 26.1: Códigos de repetición bajo T1 y desfase (notas §27, recalculado).

ruido	sin código	inversión de bit	inversión de fase
sólo T1, $\gamma = 0{,}02$	**0,0067**	0,0101	0,0197
sólo desfase, $p = 0{,}02$	0,0133	0,0384	**0,0008**
$\gamma = p = 0{,}02$	**0,0199**	0,0474	0,0204

- **Ningún código de repetición corrige el T1**, y el de inversión de bit es peor que no codificar en todos los casos. La frontera entre "código de fase" y "sin código" está en $p = \gamma$ (cociente 1,00, 1,02 y 1,10 con $\gamma = 0{,}002$, 0,01 y 0,04).
- **El código de Leung sí corrige el T1**: su infidelidad es $\approx 0{,}92\,\gamma^2$, 36 veces menor que sin código con $\gamma = 0{,}01$ y 364 veces con $\gamma = 0{,}001$. Pero es frágil al desfase: gana sólo si $p < \gamma/4$ (frontera 0,249, 0,247 y 0,237).

La regla en tiempos del dispositivo. Con una ronda de espera, $\gamma = t/T_1$ y $p = t/2T_\varphi$, así que $p = \gamma/4$ es $T_2 = T_1$ y $p = \gamma$ es $T_2 = 0{,}4\,T_1$. La mejor opción es **Leung si** $T_2 > T_1$**, ningún código si** $0{,}4\,T_1 < T_2 < T_1$**, y el código de fase si** $T_2 < 0{,}4\,T_1$; el script lo confirma en nueve cocientes T_2/T_1. Con los dos testigos qg medidos con 1000 disparos cada uno, la política elige bien en 79 % de 300 casos al azar, con un costo de 6,4 % sobre el oráculo, contra 14,7 % de la política de §27 (sin Leung) y 64–220 % de quedarse siempre con una opción. **La lectura** qg_Z **sola no sirve**: ve el T1 pero no el desfase, y recomienda siempre no codificar.

26.3. El síndrome como testigo continuo

Una vez elegido el código, sus ancillas siguen leyendo el ruido. En el código de Leung las expectativas de los estabilizadores son, en forma cerrada (notas §33),

$$\langle Z_0 Z_1 \rangle = 1 - 2\gamma(1-\gamma), \qquad \langle XXXX \rangle = qg_X^4,$$

y el script lo confirma contra el cálculo con operadores de Kraus (por ejemplo, tasas 0,0099 y 0,02161 con $\gamma = 0{,}01$ y $p = 0{,}003$). Así, la lectura qg de cada ancilla se invierte en una línea a γ y p. En las notas, con T_2/T_1 que salta al azar entre 1,6, 0,6 y 0,3, seguir el ruido sólo con los síndromes cuesta 13,1 % sobre el oráculo **sin ningún disparo de prueba**, mejor que recalibrar cada 10 ventanas (20,4 %); un híbrido llega a 7,2 % con 4 veces menos disparos de prueba que medir en cada ventana (6,6 %). Calibrar una sola vez al principio es peor que no codificar nunca (57,7 % contra 25,9 %).

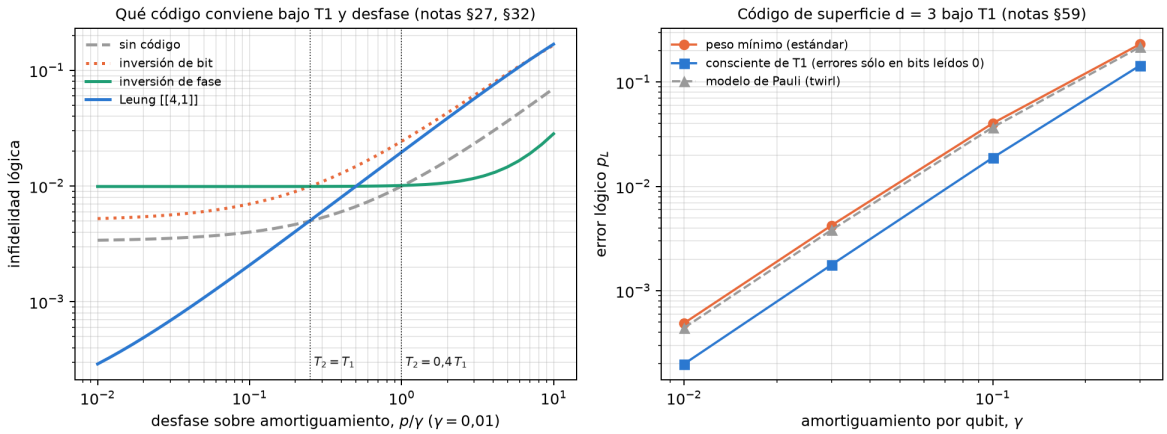


Figura 26.1: Izquierda: infidelidad lógica de cuatro opciones frente al cociente desfase/amortiguamiento con $\gamma = 0{,}01$; las líneas verticales son las fronteras $T_2 = T_1$ y $T_2 = 0{,}4\,T_1$. Derecha: error lógico del código de superficie d = 3 bajo T1, con el decodificador estándar, el consciente del T1 y el modelo de Pauli.

En circuitos de dispositivos. Leyendo los síndromes de Leung en tres modelos de ruido de IBM (§88), el amortiguamiento salía a 1–10 % de la calibración en dos de ellos y fallaba en el tercero; las causas eran el enrutamiento y un piso de errores de 9 % (§92). Leyéndolos de forma destructiva, sin ancillas ni SWAP, sobre el mejor camino de 4 qubits (§93), las cuatro predicciones registradas se cumplieron: el amortiguamiento sale a 1–4 % de la calibración y el piso baja a 2–3 %. El desfase salía 1,17–1,51 veces alto, y §99 encontró por qué: $\langle XXXX \rangle$ lee la **media producto** de los cuatro qubits, que es lo que limita la coherencia lógica, y contra ella el ajuste coincide a 0,99–1,04.

26.4. El código de superficie y el decodificador consciente del T1

En el código de superficie rotado de distancia 3 (9 qubits de datos), cada estabilizador promediado es una lectura qg de una paridad. El script recalcula en capacidad de código, enumerando los 512 patrones: $p_L = 1{,}79 \cdot 10^{-5}$, $1{,}73 \cdot 10^{-3}$ y $1{,}44 \cdot 10^{-2}$ con $p = 0{,}001$, 0,01 y 0,03, y un pseudo-umbral de 0,0753 (notas §59).

Los síndromes casi no ven el T1. Bajo amortiguamiento, un síndrome de peso w lee exactamente $(1-\gamma)^w + \gamma^w$, contra $(1-\gamma)^w$ del modelo de Pauli equivalente:

con $\gamma = 0{,}01$ y $w = 2$, 0,98020 contra 0,98010, una diferencia que pediría unos 10^8 disparos. **La lectura media del registro sí lo ve**: vale γ bajo T1 y 0 con inversiones simétricas, y sale de los mismos bits.

Decodificar sabiendo que el T1 deja ceros. Un decaimiento sólo convierte 1 en 0, así que un decodificador que pone los errores sólo en bits leídos 0 baja el error lógico:

Tabla 26.2: Código de superficie d = 3 bajo T1, capacidad de código (notas §59, recalculado).

γ	modelo de Pauli	peso mínimo	consciente del T1	máxima verosimilitud	cociente
0,01	$4{,}41 \cdot 10^{-4}$	$4{,}90 \cdot 10^{-4}$	$1{,}99 \cdot 10^{-4}$	$1{,}99 \cdot 10^{-4}$	2,46
0,03	$3{,}82 \cdot 10^{-3}$	$4{,}22 \cdot 10^{-3}$	$1{,}77 \cdot 10^{-3}$	$1{,}77 \cdot 10^{-3}$	2,39
0,1	$3{,}69 \cdot 10^{-2}$	$4{,}03 \cdot 10^{-2}$	$1{,}89 \cdot 10^{-2}$	$1{,}89 \cdot 10^{-2}$	2,14
0,3	0,217	0,231	0,144	0,144	1,60

El decodificador consciente del T1 coincide con el de máxima verosimilitud, y el modelo de Pauli subestima el error del estándar en 6–11 %. **¿Sobrevive a nivel de circuito?** En las notas (§64), con extracción de síndromes completa y d rondas, la ganancia es 2,2 veces con $d = 3$ y 3,3 con $d = 5$ bajo T1 puro, 1,6 y 2,0 cuando el T1 domina, y crece con la distancia. **No es gratis**: cuando domina el ruido despolarizante, reponderar cuesta 15 % con $d = 3$. Un testigo qg (lectura media final sobre tasa de detectores) elige el decodificador sin etiquetas: 1,3–2,6 donde gana el consciente del T1 y 0,34–0,54 donde pierde, aunque el umbral de 1 se eligió después de ver los casos.

26.5. Qutrits y qubits de borrado

Antes de extender qang más allá del qubit, las notas preguntaron si una lectura de tres niveles le da una ventaja (§70–§74), con criterios registrados antes de cada corrida:

- **Si el qubit fugado conserva su valor, la bandera $|2\rangle$ no sirve** (§70): toda la ganancia era la reponderación por T1, y agregarle la bandera la empeoraba. Veredicto registrado: sin ventaja del qutrit.
- **Si la fuga desordena el qubit, sí sirve** (§70b): reponderación más bandera dan 1,78 veces sobre el estándar, más que el producto de las dos partes (1,55).

- **Una regla para la bandera** (§71): pesarla por de dónde vino la fuga (posterior $1/(1+a)$) nunca es peor que el estándar, y la ganancia de qutrit más qg crece con la distancia (1,48 veces con $d=3$, 1,77 con $d=5$). Una de las cuatro predicciones falló, así que queda como regla parcialmente confirmada.
- **Un transmón real** (§72, CZ coherente de tres niveles): la fuga sale sólo desde $|11\rangle$, la asimetría es cero y la bandera casi no sirve; la reponderación qg sí (1,8–2,0 veces).
- **Qubits de borrado** (§73, §74): si el dispositivo avisa los decaimientos con probabilidad h, combinar ingenuamente el aviso con la reponderación empeora (0,46 veces con $h=0{,}99$). La regla $(1-h)$, registrada antes de correr, lo arregla: qg sigue dando 1,4–1,9 veces con $h=0{,}25$–$0{,}5$ y se apaga hacia 1 cuando el aviso es casi perfecto.

26.6. Cortar circuitos: dónde y a qué costo

Cortar una compuerta de dos qubits para correr un circuito grande en partes multiplica los disparos necesarios por γ^2. Para una rotación de Pauli como RZZ(θ), en qg (notas §15.2):

$$\gamma = 1 + 2|\sin\theta| = 1 + 2\sqrt{1-qg^2}, \qquad qg = \cos\theta.$$

Cortar es gratis en los polos ($qg = \pm 1$) y cuesta 9 veces en el ecuador. Un atajo que circula, $\gamma^2 = 1 + \sqrt{1-qg^2}$, subestima el costo hasta 4,5 veces (2 en lugar de 9 en $qg=0$).

¿Dónde cortar? Un circuito de 8 qubits con 12 acoplamientos RZZ debe correr en bloques de a lo sumo 4 qubits (§26). El script compara tres reglas en 200 instancias por régimen, eligiendo entre las 3795 particiones:

Tabla 26.3: Multiplicador de disparos, media geométrica (notas §26, recalculado).

régimen	menos cortes	enlaces más débiles	regla qg (óptimo)
Trotter (ángulos chicos)	7254	3838	3642
QAOA (ángulos grandes)	976	2174	753

Con ángulos chicos, “cortar los enlaces más débiles” casi coincide con la regla qg. Con ángulos grandes es la peor regla: RZZ$(\theta \approx \pi)$ es casi un $Z \otimes Z$ local y cortarla casi no cuesta. **La herramienta de referencia ya lo hace**: `find_cuts`

de qiskit-addon-cutting llega al óptimo en las 400 instancias de las notas (no está instalada en este entorno, así que el script no la recorre). Lo que agrega qg es la forma cerrada: puntuar las 3795 particiones lleva 1–2 ms por instancia. En la corrida completa de las notas, la elección qg baja el error 2,9 veces con disparos proporcionales a los pesos, y lo sube con disparos iguales por subexperimento: la ley γ^2 supone muestreo por importancia.

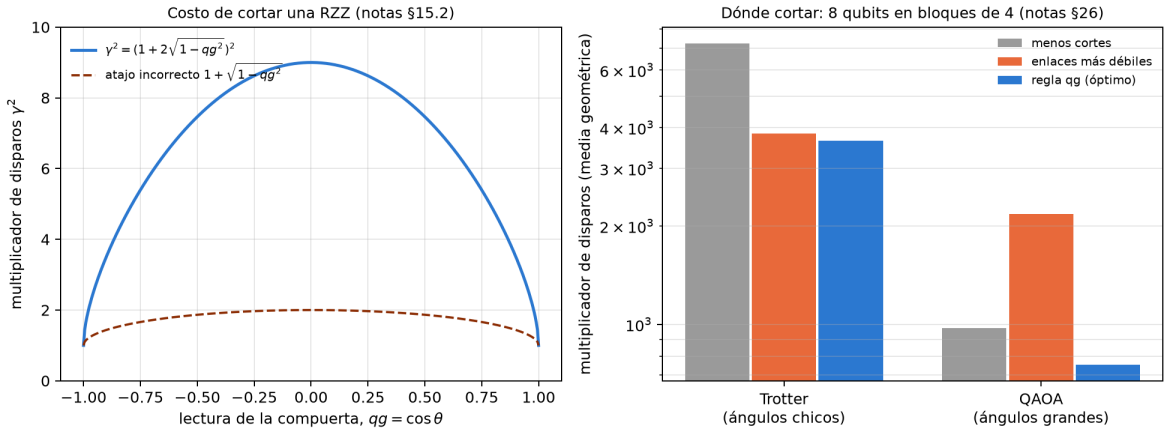


Figura 26.2: Izquierda: multiplicador de disparos de cortar una RZZ frente a su lectura $qg = \cos\theta$, y el atajo incorrecto. Derecha: costo de tres reglas para elegir los cortes en dos regímenes de ángulos.

26.7. Benchmarking aleatorizado, ZNE y qg_S como señal

- **Benchmarking aleatorizado** (§11.1): con ruido despolarizante por compuerta, la supervivencia es exactamente $qg_Z(m) = (1-p)^{m+1}$, la misma para cualquier secuencia de Clifford. El script lo confirma en cuatro semillas (0,95, 0,7351 y 0,5688 con $m = 0$, 5 y 10).
- **ZNE: en qué espacio extrapolar** (§11.2): si el ruido encoge la lectura, extrapolar en qg es exacto (10^{-16}) y en el ángulo no (10^{-4}); si el ruido gira el ángulo, al revés. Regla: extrapolar donde el ruido es lineal, y el cambio $\theta \leftrightarrow qg$ hace barato probar los dos.
- qg_S **como señal** (§10): la entropía de la salida sigue a la probabilidad de salidas pesadas sin simulación ideal (correlación −0,926 con ruido despolarizante), pero bajo T1 deja de ser monótona: en un modelo de fake brisbane con 200 µs de espera queda por debajo del valor sin ruido, y ordenaría como menos ruidoso al punto más dañado. Con la lectura media del registro al lado, que sube en cada paso, el par ya no se confunde.

26.8. Lo que queda pendiente

Lo de capacidad de código está verificado; lo de circuito, qutrits y borrado es de simulaciones de las notas con predicciones registradas. La lectura destructiva de los síndromes de Leung (§93, 24 circuitos de 4 qubits) está lista para correr en un dispositivo IBM real y no se corrió.

26.9. Sin qang y con qang

Tabla 26.4: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
elegir un código	elegir uno fijo: 64–220 % sobre el oráculo	testigos qg_Z y qg_X y la regla T_2/T_1: 6,4 %	**a favor**; la regla en T_2/T_1 es equivalente, qg la hace medible con dos lecturas
ver el T1 con un solo testigo	—	qg_Z solo: recomienda siempre no codificar	**en contra** si se usa solo: hacen falta las dos componentes
seguir la deriva	recalibrar cada 10 ventanas: 20,4 %	síndromes como lecturas qg: 13,1 % sin disparos de prueba	**a favor**
leer el desfase de los síndromes	media aritmética: 1,17–1,51 veces alto	media producto: 0,99–1,04	**a favor**: el número correcto es el que limita al código
ver el T1 en el código de superficie	síndromes: diferencia de γ^w, invisible	lectura media del registro: vale γ	**a favor**
decodificar bajo T1	peso mínimo	errores sólo en bits leídos 0: 2,1–2,5 veces (capacidad), 2,2–3,3 (circuito)	**a favor** cuando domina el T1; **en contra** (15 %) cuando domina el despolarizante

acción	sin qang	con qang	diferencia
qutrits y borrado	bandera borrada a ciegas	bandera pesada por su origen; regla $(1-h)$	**a favor** con fugas que desordenan o avisos parciales; **ninguna** con avisos casi perfectos
elegir cortes	contar cortes o cortar lo débil	$\gamma = 1+2\sqrt{1-qg^2}$ por compuerta	**a favor** frente a reglas ciegas al ángulo (hasta 2,9 veces); **ninguna** frente a qiskit-addon-cutting, que ya lo hace
extrapolar a ruido cero	un espacio fijo	elegir qg o θ según el ruido	**a favor**, en modelos idealizados
certificar con la entropía	qg_S solo: se engaña bajo T1	qg_S más la lectura media	**a favor** del par

Balance. Ninguno de los códigos ni de los decodificadores es nuevo, y la herramienta de corte de referencia ya elige como qg. Lo que la escala qang aporta acá es medible y concreto: el síndrome como lectura que se invierte en una línea a γ y p, una regla de elección de código con su costo, una lectura del T1 que los síndromes no tienen, un decodificador que usa que el T1 deja ceros, y la forma cerrada del costo de cortar. Las ganancias dependen del régimen, y la tabla dice dónde se pierden.

26.10. En código

```
from qang import knitting as KN

KN.cut_sampling_overhead(0.0)   # 9: cortar una RZZ en el ecuador (qg = 0)
KN.cut_sampling_overhead(0.95)   # 2,64: barato cerca del polo
KN.total_sampling_overhead([0.95, 0.2, -0.99])  # 38,0: producto de los gamma^2
```

26.11. Resumen

- Cada síndrome es la lectura qg de una paridad; con qg_Z de $|1\rangle$ y qg_X de $|+\rangle$ se leen el T1 y el desfase.
- Ningún código de repetición corrige el T1; el de Leung sí. Regla: Leung si $T_2 > T_1$, ningún código si $0{,}4\,T_1 < T_2 < T_1$, código de fase si $T_2 < 0{,}4\,T_1$.
- Los síndromes de Leung siguen la deriva sin disparos de prueba, y leen la media producto del desfase.
- En el código de superficie los síndromes no ven el T1 y la lectura media sí; poner los errores sólo en bits leídos 0 baja el error lógico 2–3 veces cuando domina el T1.
- Con qutrits y qubits de borrado, qg suma si la bandera se pesa por su origen y el aviso por $(1 - h)$.
- Cortar una RZZ cuesta $(1 + 2\sqrt{1 - qg^2})^2$: gratis en los polos, 9 veces en el ecuador.

Notas bibliográficas

El primer código cuántico es Shor (1995), y el de 4 qubits para T1, Leung et al. (1997). El código de superficie es Kitaev (2003), Dennis et al. (2002) y Fowler et al. (2012); la conversión a borrados, Wu et al. (2022). El corte de circuitos es Peng et al. (2020); el benchmarking aleatorizado, Magesan et al. (2011), y la extrapolación a ruido cero, Temme et al. (2017). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

27 Caracterización de hardware en qg

Antes de correr cualquier algoritmo hay que saber cómo es el dispositivo: cuánto tarda en decaer (T1), cuánto en perder la fase (T2), qué tan caliente está y cuánto se equivoca al leer. Este capítulo lee esas cantidades en la escala del capítulo 1. Cada una aparece como una lectura qg, y la escala ayuda en tres casos concretos: separar la temperatura del error de lectura, distinguir T1 de ruido unital con la lectura media, y elegir la grilla con la que la electrónica fija los ángulos. Los tres se recalculan con código. Los resultados en modelos de dispositivos IBM son los de las corridas registradas de las notas.

27.1. Desde la base: un qubit en reposo es una lectura

Un qubit real nunca está del todo frío: en reposo tiene una población excitada residual p, y su lectura de equilibrio es $qg_{eq} = 1-2p$, en m-qg $m_{eq} = 1000(1-2p)$. Para un qubit de frecuencia f en equilibrio térmico,

$$qg_{eq} = \tanh\left(\frac{hf}{2k_B T_{\text{ef}}}\right),$$

así que la lectura de equilibrio **es** un termómetro. La lectura del aparato también es afín en qg: si confunde 0→1 con probabilidad e_{01} y 1→0 con e_{10}, la lectura medida es $a + b\,qg$, con $a = e_{10} - e_{01}$ y $b = 1 - e_{01} - e_{10}$ (notas §31). El problema es que en la base Z sólo se ve $a + b\,qg_{eq}$: la temperatura y el error de lectura quedan mezclados.

27.2. T1, T2, temperatura y lectura en un solo barrido

La calibración estándar mide "$|0\rangle$" y "$|1\rangle$", que en realidad son el estado térmico y X aplicado a él, y cuenta la población térmica como error de lectura. El protocolo qg agrega un heraldo: medir, aplicar I, X o $R_y(\pi/2)$, esperar y medir de nuevo. Los pares a tiempo cero dan, en forma cerrada, la media m, la covarianza de lectura $V = b^2(1-qg_{eq}^2)$ y $C_X = a^2 - b^2$, de donde salen a, b y qg_{eq}. Los retardos agregan

T1 (después de X) y T2 (el decaimiento de qg_X). El script repite el experimento de las notas con 40 repeticiones de 16 circuitos de 2000 disparos (T1 = 100 µs, T2 = 70 µs, $e_{01} = 0{,}015$, $e_{10} = 0{,}04$, 5 GHz):

Tabla 27.1: Calibración estándar contra barrido qg con heraldo (notas §31, recalculado).

población térmica real (temperatura)	e_{01} estándar	e_{01} qg	temperatura estándar	temperatura qg
0 (0 mK)	0,0145	0,0149	0	11 ± 15 mK (cota)
0,01 (52 mK)	0,0240	**0,0149**	0	$52{,}5 \pm 1{,}0$
0,03 (69 mK)	0,0418	**0,0149**	0	$68{,}9 \pm 0{,}9$
0,08 (98 mK)	0,0915	**0,0153**	0	$98{,}3 \pm 0{,}8$

- **La calibración estándar lee la temperatura como error de lectura**: sobreestima e_{01} exactamente en $p{\cdot}b$ y ve el qubit perfectamente frío a cualquier temperatura.
- **El barrido qg no tiene sesgo** en e_{01}, e_{10}, p ni la temperatura, y la resuelve a 1 mK desde 52 mK (con $p = 0$ sólo da una cota).
- T1 y T2 salen sin sesgo en los dos, pero el ajuste conjunto qg es más preciso (desvío de T1 de 1,5–2,1 µs contra 2,8–3,1; de T2, 2,2–2,5 contra 3,1–4,8), en parte por el ajuste de máxima verosimilitud mismo.

Como circuitos de IBM (§86). Con 32 circuitos de un qubit con medición a mitad del circuito, en tres modelos de ruido de dispositivos IBM, las tres predicciones registradas se cumplieron: T1 y T2 dentro de 25 % y errores de lectura dentro de 0,01. El T2 qg queda más cerca del reportado que el estándar, que sale 10 % alto en dos de ellos. Lo que un modelo simulado no puede probar es justamente la población térmica (Aer no la tiene). La corrida real está pendiente y es la primera que convendría hacer en hardware.

Lo que ya dice un chip real (§168, §170). En IQM Garnet la lectura se corrigió con los dos polos, en el mismo qubit: $e_0 = 0{,}0055$ y $e_1 = 0{,}029$ en §168, y $0{,}0030$ y $0{,}0265$ en §170. Es la calibración estándar de la tabla de arriba, así que si el qubit tenía población térmica, está contada dentro de e_0; los dos números no la separan, y el cambio de e_0 entre corridas no dice si cambió la lectura o la temperatura. Las dos corridas encontraron además algo que el modelo afín de la lectura no tiene: un error que depende del ángulo. Con los polos corregidos, R_y leyó entre 16 y 55 m-qg bajo en los ángulos intermedios de §168 (sobre-rotaciones de $1{,}3^\circ$ a $3{,}9^\circ$), y el autoestado de §170, entre 26 y 71 m-qg bajo (Sección G.6). Calibrar la lectura

no alcanza: también hay que caracterizar el ángulo de las compuertas, y en m-qg ese error se ve sin ningún modelo.

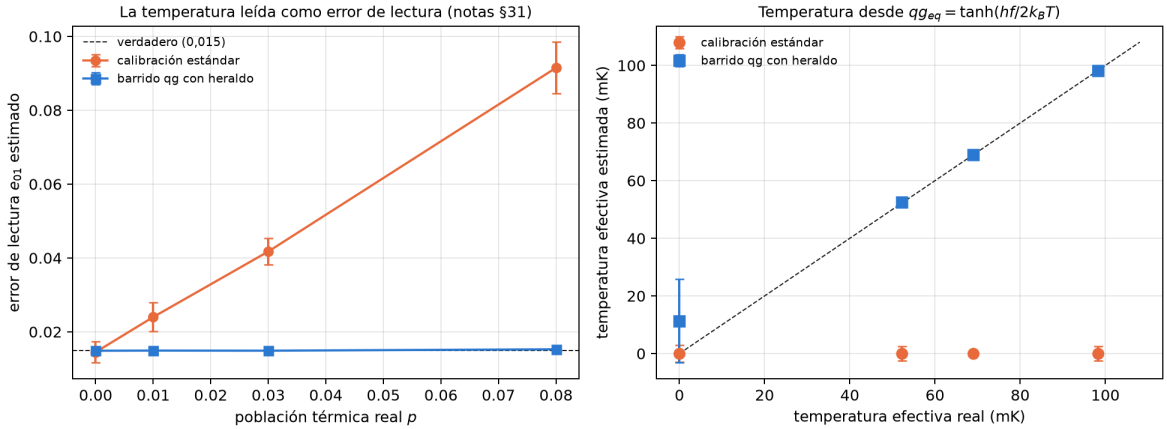


Figura 27.1: Izquierda: error de lectura e_{01} estimado frente a la población térmica real; la calibración estándar lo infla en $p \cdot b$, el barrido qg queda en el valor verdadero. Derecha: temperatura efectiva estimada frente a la real; la estándar siempre da 0.

27.3. ¿Qué ruido es? La lectura media contra XEB y HOP

Con N disparos de un circuito de volumen cuántico de 4 qubits, ¿se puede decidir si el ruido es disipativo (T1) o unital (desfase o despolarizante)? Las notas (§18) lo plantearon con 24 circuitos, tres canales y 10 intensidades, y cada medida se convierte en un clasificador con un único umbral ajustado en 16 circuitos y evaluado en 8 que no vio. XEB y HOP necesitan la distribución ideal (una simulación clásica); la lectura media y qg_S sólo conteos. El script lo recalcula:

Tabla 27.2: Acierto en circuitos de prueba (0,67 = responder siempre «unital»).

ruido por compuerta	disparos	lectura media	qg_S	XEB	HOP
fuerte, 2–50 %	100	**0,88**	0,72	0,70	0,71
fuerte, 2–50 %	1000	**0,91**	0,72	0,74	0,73
fuerte, 2–50 %	10 000	**0,91**	0,73	0,76	0,75
débil, 0,5–5 %	100 000	0,67	0,67	0,67	0,67

- **Con ruido fuerte, la lectura media identifica el T1** mucho mejor que las medidas estándar, con sólo 100 disparos y sin la distribución ideal: 0,88

con 100 disparos y 0,91 con 1000 o más. Su acierto crece con la intensidad (0,75 debajo de 10 % por compuerta, 0,98 arriba de 25 %). XEB y HOP miden cuánto ruido hay, no de qué tipo.
- **Con intensidades realistas, todo queda en el azar**, aun con 100 000 disparos. El límite no es el ruido de disparo: la lectura media ideal ya varía de circuito en circuito (desvío 0,139, de −0,325 a +0,334), más que el corrimiento del T1.

La consecuencia práctica: la lectura media es un detector de T1 en circuitos cuyo valor ideal se conoce, como una espera antes de medir, no un detector pasivo sobre cualquier circuito.

27.4. Errores coherentes y el ZZ siempre encendido

Un error de fase condicional (un ZZ de más) conserva el peso, así que se podría esperar que pase el filtro de peso sin que lo note. Las notas lo probaron dos veces con predicciones registradas, y las dos veces la predicción falló de una forma informativa:

- **Un RZZ coherente después de cada compuerta nativa** (§145): la fracción conservada cayó 0,009–0,020 con $\varepsilon = 0{,}10$ rad, y el error filtrado creció sólo 4 % en los dispositivos con ECR pero 62 % en FakeTorino (CZ). El error actúa dentro de la descomposición de la compuerta lógica, donde los qubits no están en la base computacional, y parte sale del sector.
- **El ZZ siempre encendido entre vecinos** (§150, 5 y 15 kHz): el filtro quitó 32–60 % del error agregado; el error filtrado creció 14–38 % a 15 kHz y quedó 4–5 veces por debajo del crudo. Los circuitos cortos sufren menos.

En estos dispositivos los errores coherentes se filtran en proporción al tiempo que los qubits pasan fuera de la base computacional.

27.5. Cuantización del control: grilla pareja en el ángulo o en qg

La electrónica fija cada ángulo con una grilla de 2^b valores. Lo habitual es una grilla pareja en θ; una grilla pareja en $qg = \cos\theta$ es pareja en la probabilidad de Born y, sobre la esfera de Bloch, son bandas de igual área (notas §17). El script lo recalcula:

- **Un qubit, objetivos al azar**: el peor error de probabilidad de la grilla qg es exactamente $\pi/2$ veces menor (1,568, 1,570 y 1,570 con 4, 8 y 10 bits; ahorra $\log_2(\pi/2) \approx 0{,}65$ bits). Pero su peor infidelidad es peor, por un factor que crece como 2^b (de $2{,}7{\cdot}10^{-3}$ a $1{,}7{\cdot}10^{-2}$ con 4 bits), porque es gruesa cerca de los polos.
- **Cargar una distribución** con un árbol de rotaciones R_y (el paso de preparación de Monte Carlo cuántico): en qg cada rotación se fija directamente con una probabilidad condicional, $qg = 2p - 1$. En los 45 casos (4, 6 y 8 qubits; 4, 6 y 8 bits; cinco distribuciones), la grilla qg baja la distancia de variación total en **43 de 45** (mediana 1,56 veces, hasta 2,9).
- Para distribuciones suaves la infidelidad también es menor con la grilla qg (25 de 27, mediana 1,98 veces); para las ralas o muy picudas gana la grilla en θ (15 de 18, mediana 3,3 veces, hasta 56).

Regla de diseño: grilla pareja en qg cuando la tarea es reproducir probabilidades (muestreo, Monte Carlo, distribuciones suaves); grilla pareja en θ cuando importa la fidelidad del estado y los objetivos están cerca de los polos.

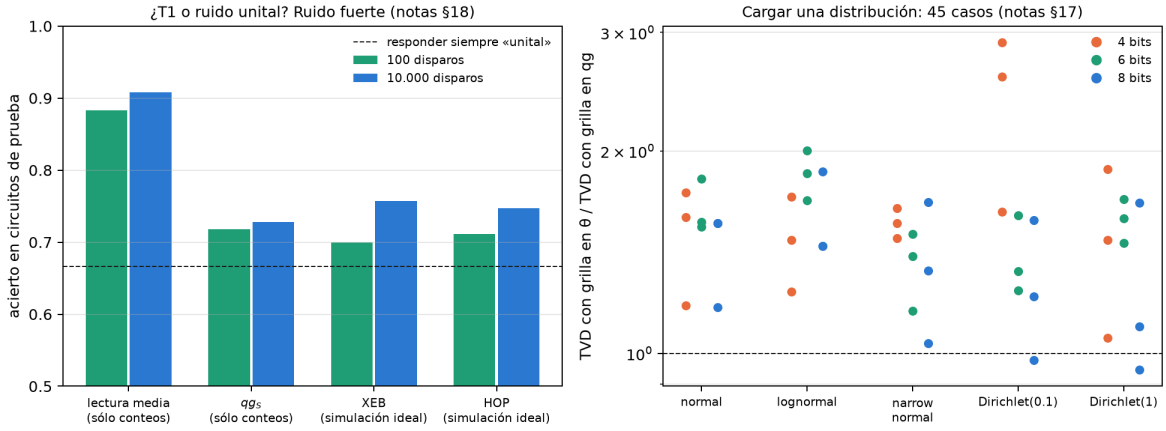


Figura 27.2: Izquierda: acierto para distinguir T1 de ruido unital con cuatro medidas, con 100 y 10 000 disparos y ruido fuerte. Derecha: cociente entre la distancia de variación total con grilla en θ y con grilla en qg en los 45 casos de carga; por encima de 1 gana la grilla qg.

27.6. Lo que queda pendiente

El barrido con heraldo (§86, 32 circuitos de un qubit) está listo para un dispositivo IBM real y es lo que más conviene correr primero: la población térmica, su

punto central, no existe en los simuladores. La detección de T1 con intensidades realistas necesita circuitos de valor ideal conocido.

27.7. Sin qang y con qang

Tabla 27.3: Las acciones del capítulo sin la escala qang y con ella.

acción	sin qang	con qang	diferencia
calibrar la lectura	dos circuitos, "$\lvert 0\rangle$" y "$\lvert 1\rangle$": e_{01} inflado en $p\,b$	barrido con heraldo: sin sesgo	**a favor**; separar con mediciones repetidas es práctica conocida, qg agrega la forma cerrada
medir la temperatura	la calibración estándar ve 0 siempre	T_{ef} desde qg_{eq}, a 1 mK	**a favor**
medir T1 y T2	ajustes separados	ajuste conjunto qg: 1,5 veces más preciso	**a favor**, en parte por el ajuste conjunto
distinguir T1 de ruido unital	XEB o HOP, con simulación ideal: 0,70–0,76	lectura media, sólo conteos: 0,88–0,91	**a favor** con ruido fuerte; **ninguna** con ruido realista
prever errores coherentes ZZ	"el filtro no los ve"	el filtro quita 32–60 % del ZZ siempre encendido	**a favor**, aunque la predicción registrada falló
cuantizar el control	grilla pareja en θ	grilla pareja en qg: probabilidad $\pi/2$ veces mejor, 43 de 45 cargas mejores	**a favor** para probabilidades; **en contra** para fidelidad cerca de los polos

Balance. Este es el capítulo donde la escala qang aporta más por sí misma, sin depender del filtro de peso: la lectura de equilibrio es un termómetro, la lectura del aparato es afín en qg y se separa de la temperatura en forma cerrada, la lectura media distingue disipación de ruido unital, y una grilla pareja en qg es la grilla correcta para probabilidades. Los límites quedan escritos: con ruido realista la lectura media no clasifica circuitos arbitrarios, y la grilla qg pierde en fidelidad cerca de los polos.

27.8. En código

```
import numpy as np

f = 5e9                                    # frecuencia del qubit (Hz)
h, kB = 6.62607015e-34, 1.380649e-23
p = 0.03                                   # población térmica residual
qg_eq = 1 - 2 * p                        # lectura de equilibrio: 940 m-qg
T_eff = h * f / (2 * kB * np.arctanh(qg_eq))
T_eff * 1e3                                # ~69 mK
```

27.9. Resumen

- La lectura de equilibrio $qg_{eq} = \tanh(hf/2k_BT_{\text{ef}})$ es un termómetro, y la lectura del aparato es afín en qg.
- La calibración estándar cuenta la temperatura como error de lectura; el barrido con heraldo separa las dos cosas sin sesgo y mide la temperatura a 1 mK.
- La lectura media distingue T1 de ruido unital con 100 disparos cuando el ruido es fuerte (0,88 contra 0,70–0,72); con ruido realista nada lo logra sobre circuitos arbitrarios.
- Los errores ZZ coherentes no son invisibles al filtro: se filtran según el tiempo fuera de la base computacional.
- Una grilla pareja en qg mejora 43 de 45 cargas de distribuciones; una pareja en θ conviene para fidelidad cerca de los polos.

Notas bibliográficas

Para T1, T2, lectura y acoplamiento ZZ en qubits superconductores, véase Krantz et al. (2019). XEB es Arute et al. (2019); HOP y el volumen cuántico, Cross et al. (2019); el benchmarking aleatorizado, Magesan et al. (2011). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte X

X. Evidencia experimental, hardware real y auditoría de falsación

28 Metodología: el protocolo de falsación pre-registrada

Los capítulos anteriores citaron una y otra vez “predicciones registradas antes de correr”. Este capítulo explica qué quiere decir eso, cuántas se cumplieron y cuántas fallaron, y algo que un libro sobre una escala nueva le debe a quien lo lee: **una auditoría de si esa anterioridad se puede comprobar**. No hay física nueva acá. El script del capítulo no simula nada: revisa el propio repositorio, su historia de git y los archivos que guardaron las corridas.

28.1. Desde la base: una predicción es una lectura que se puede equivocar

En la escala del capítulo 1, casi toda afirmación de las notas es un número en m-qg o una razón entre dos errores. Que el filtro “ayude” no dice nada; que baje el error de la lectura de 104 a 23 m-qg en tres dispositivos sí, y puede fallar. La disciplina es escribir ese número y el umbral que lo haría falso **antes** de correr, dejarlo fijado de una forma que no se pueda cambiar después, y publicar el resultado cualquiera que sea.

28.2. Dos maneras de fijar una predicción

Las notas usaron dos:

- **Por commit**: las predicciones se escriben y se suben al repositorio antes de la corrida, y la sección cita ese commit (por ejemplo, “committed before the run (77700bd)”). Es el método de §71 a §165.
- **Por sha256**: el script que hace la corrida se congela, se calcula el sha256 de sus bytes y se guarda en `examples/data/*.prereg` con una fecha. Si el script cambia, el hash deja de coincidir. Es el método de las secciones de neutrinos, núcleos, VarQTE, IQM y otras.

28.3. Balance de aciertos y fallos

Lo que el código guardó. 34 corridas dejan en su archivo de resultados un diccionario de veredictos calculados por el propio script. El script del capítulo los cuenta: **148 predicciones, 94 cumplidas (64 %) y 54 falladas**. Tres corridas fallaron todas sus predicciones (la flota de IBM, el ZZ coherente y los neutrinos colectivos) y siete las cumplieron todas, entre ellas la de $E = mc^2$ en IQM Garnet (§170).

La línea de QML. Para §75–§123, el README del repositorio lleva otro recuento: 176 predicciones juzgadas, 123 cumplidas y 53 falladas, con 4 más esperando la corrida en hardware de IonQ. Las dos cuentas son contabilidades distintas que se superponen en parte, y no deben sumarse.

Lo que no se puede recontar automáticamente. Las secciones anteriores a §71 casi no usan pre-registro, y muchas posteriores registran sus veredictos sólo en prosa (“Four passed; V1 failed”), con redacciones distintas. Un recuento total sobre §1–§170 haría falta hacerlo a mano, sección por sección. Este libro no lo hace: da las dos cuentas que se pueden comprobar.

Un 64 % de aciertos no es una debilidad. Una tasa cerca del 100 % sería la señal de umbrales demasiado blandos. Varias fallas fueron los resultados más informativos de las notas: el ZZ coherente que el filtro sí ve (capítulo 27), la regla de borrado que hubo que corregir con $(1 - h)$ (capítulo 26), la métrica qg_YY que ayuda menos de lo previsto (capítulo 23).

28.4. Auditoría de la anterioridad

Que una predicción se haya escrito “antes” hay que poder comprobarlo. El script lo hace con git:

- **Por commit (54 citas, §71–§165)**: cada commit citado existe en la historia y, en ese commit, las notas todavía no tienen los resultados de la sección. **Las 54 son consistentes.**
- **Por sha256 (16 archivos)**: ningún script coincide hoy con su hash, lo esperable, porque después de la corrida se le agregan los hallazgos al comentario inicial. La pregunta es si alguna versión guardada coincide.
    - En **8 de 16**, el hash coincide con el script en el commit que agregó el `.prereg`, y ese commit es anterior al de los resultados. La anterioridad está **comprobada**.

- En **8 de 16**, el `.prereg` y los resultados entraron en el mismo commit, y ninguna versión del script guardada en git coincide con el hash: el script se congeló, se corrió y se editó antes de subir nada. Para esos ocho la anterioridad descansa **sólo en la fecha que trae el propio archivo**, que el autor pudo escribir en cualquier momento.

Los ocho son: materia y oscilación de neutrinos, ordenamiento y estériles, neutrinos solares, post-selección y CTC, área de pulso, el núcleo cuántico y VarQTE. Sus resultados no son falsos por esto; su pre-registro no es verificable por terceros. La corrección para lo que venga es simple: subir el `.prereg` y el script congelado en un commit propio antes de correr.

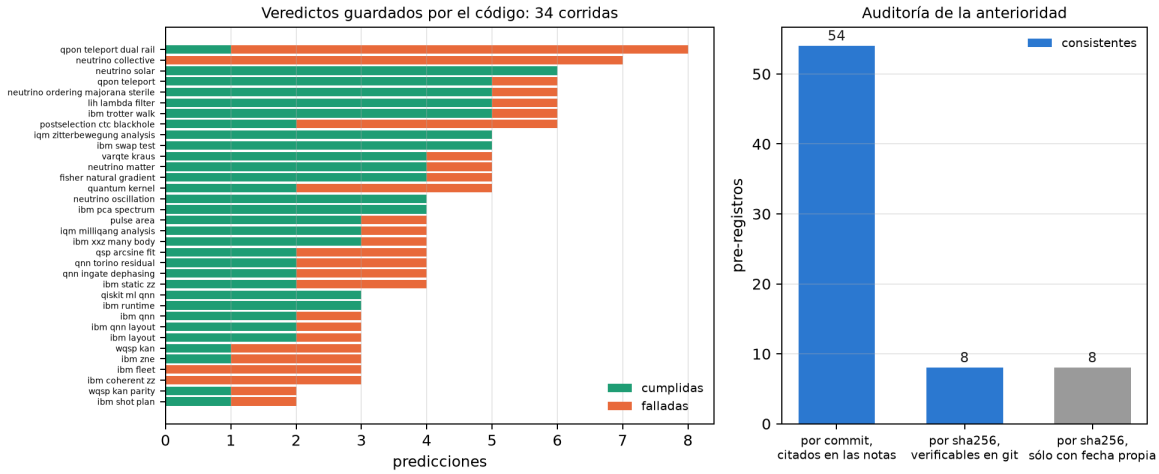


Figura 28.1: Izquierda: predicciones cumplidas y falladas en las 34 corridas que guardan sus veredictos. Derecha: auditoría de la anterioridad: las 54 predicciones fijadas por commit son consistentes; de los 16 pre-registros por sha256, 8 se pueden comprobar en git y 8 sólo tienen su propia fecha.

28.5. Bancos de prueba

Casi todos los resultados del libro son de simulaciones con modelos de ruido calibrados, no de hardware:

- **IBM**: los modelos de qiskit-ibm-runtime con calibraciones reales publicadas (Brisbane, Sherbrooke, Torino, Fez y una flota de 21), corridos localmente en Aer o en el modo local de IBM Runtime (§137, §144).

- **IonQ**: el simulador en la nube con los modelos de ruido de Aria-1 y Forte-1, gratis (§20, §38). Sin T1 dominante: la lectura media no se mueve (+0,004 y +0,007, compatibles con cero), al revés que el modelo de IBM.
- **IQM**: los modelos simulados de Apollo y Garnet, usados como ensayo gratuito antes de cada corrida real.

Un modelo de ruido calibrado no es un dispositivo: no tiene población térmica (capítulo 27), ni deriva, ni la forma en que el software del proveedor agrupa los circuitos. Por eso el libro llama "simulado" a todo lo que no corrió en hardware.

28.6. Hardware real

- **IonQ Forte-1** (§128): las predicciones para H_2 con el filtro quedaron fijadas por commit y el ensayo en el simulador las cumplió, pero el proveedor rechazó el primer envío antes de aceptar el trabajo (el proyecto no tenía ese QPU habilitado). No se cobró nada y no hay datos.
- **IQM Garnet, neutrinos de 3 sabores** (§165, 8 circuitos de 300 disparos): el script recalcula las cuatro comprobaciones desde la corrida guardada, y **las cuatro se cumplen**. El error baja de 0,0615 a 0,0386 (1,59 veces) y se conserva el 88 % de los disparos. Con el filtro el mínimo de supervivencia queda en 2,6 GeV (exacto 2,63); sin él, en 0,8 GeV.
- **IQM Garnet, el milli-qang** (§168, 26 circuitos de 4000 disparos en un qubit): tres de cuatro predicciones cumplidas. El script recalcula el costo de la compuerta X con una sola pendiente: **1,64 m-qg por compuerta** ($\chi^2/\mathrm{gl} = 0{,}81$). La predicción M2 falló: las diez copias del ecuador se dispersan la mitad de lo que permite el ruido binomial (cociente 0,50). Queda abierta.
- **IQM Garnet,** $E = mc^2$ **como lectura** (§170, 24 circuitos de 2000 disparos en el mismo qubit): el pre-registro se subió al repositorio en su propio commit antes del trabajo, como pedía la corrección de Sección 28.4, y por eso es el octavo sha256 comprobable. **Las cinco predicciones se cumplen** (Sección G.6), con un sesgo de compuerta de 26 a 71 m-qg que queda a la vista.

Las tres corridas de IQM son el primer dato en hardware real del proyecto, y el capítulo 31 las trata en detalle. Hay una réplica de §168 preparada en cinco qubits y dos días, sin subir al repositorio, porque a tamaño completo costaría unos 80 créditos, y después de §170 quedan unos 5 (estimado).

El criterio $\mathrm{Var}_\theta(F_{\mathbf{eco}})$**.** El índice anunciaba un criterio de falsación para QPU basado en la varianza del eco de inversión sobre trayectorias continuas. No está

definido en ninguna parte del repositorio, así que el libro no lo usa. Queda como propuesta sin escribir.

28.7. Sin qang y con qang

Este capítulo no compara la escala qang contra otra cosa: compara trabajar sin pre-registro contra trabajar con él.

Tabla 28.1: Trabajar sin pre-registro y con él.

acción	sin pre-registro	con pre-registro	diferencia
decidir si un resultado ayuda	se decide al ver los datos	umbral fijado antes, en m-qg o en razones	**a favor**: 54 de 148 predicciones fallaron y quedaron publicadas
informar las fallas	se omiten o se reinterpretan	se informan con su número (94/54, 123/53)	**a favor**
comprobar la anterioridad	imposible	por commit: 54 de 54 comprobadas; por sha256: 8 de 16	**a favor**, con 8 casos sin verificar
ensayar antes de gastar	—	simulador gratuito con las mismas predicciones antes de cada QPU	**a favor**: el rechazo de IonQ no costó nada
fijar el script por sha256	—	sólo verificable si el `.prereg` se sube antes de los resultados	**ninguna** en 8 casos: hay que corregir el procedimiento

Balance. El pre-registro funcionó: dejó fallas a la vista y se pudo comprobar en 61 de 69 casos. Los 8 restantes muestran un defecto del procedimiento, no del resultado, y ya tienen solución. La lección vale para todo el libro: una cifra sin su umbral previo no es evidencia, y un umbral previo que no se puede comprobar tampoco del todo.

28.8. En código

```
import hashlib, subprocess

h, path = open("examples/data/iqm_neutrino_qg.prereg").read().split()[:2]
c = "a74c07c5"                              # commit que agregó el .prereg
frozen = subprocess.run(["git", "show", f"{c}:{path}"], capture_output=True).stdout
hashlib.sha256(frozen.replace(b"\r\n", b"\n")).hexdigest() == h  # True: el script cong
```

28.9. Resumen

- Las predicciones se fijaron por commit (§71–§165) o por el sha256 del script congelado.
- Las 34 corridas que guardan veredictos suman 148 predicciones: 94 cumplidas y 54 falladas; la línea de QML (§75–§123) lleva 123 y 53. Un recuento total de §1–§170 haría falta hacerlo a mano.
- La anterioridad se comprueba en las 54 predicciones por commit y en 8 de los 16 pre-registros por sha256; en 8 sólo hay una fecha propia.
- Casi todo es simulado con modelos calibrados. El hardware real son tres corridas en IQM Garnet: los neutrinos (4 de 4), el milli-qang (3 de 4, con 1,64 m-qg por compuerta X) y $E = mc^2$ como lectura (5 de 5, §170).
- El criterio $\mathrm{Var}_\theta(F_{\mathrm{eco}})$ no existe en el repositorio y no se usa.

Notas bibliográficas

El criterio de falsación es el de Popper (1959), y el pre-registro como práctica, Nosek et al. (2018). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

29 Las ventajas empíricas confirmadas

Después de veintiocho capítulos de comparaciones “sin qang y con qang”, este junta las que dieron un beneficio medible, con su tamaño, sus límites y de dónde viene cada cifra. El criterio para entrar es estricto: una ganancia medida en código o en una corrida pre-registrada, contra la misma acción sin la escala o sin el filtro, y con el caso en que deja de valer escrito al lado. Todos los factores se recalculan acá, dispositivo por dispositivo, desde los archivos guardados de las corridas. No se vuelve a simular nada. Lo que no pasó el criterio va al capítulo 30.

29.1. Desde la base: de dónde vienen las ventajas

Las ventajas del libro tienen dos orígenes, y conviene no mezclarlos:

- **El filtro de peso** (capítulos 20–25): si el circuito conserva el número de excitaciones, cada disparo con el peso equivocado tuvo un error y se descarta. Es verificación de simetría, una técnica conocida. La escala qang aporta el testigo (la lectura media del registro, cuyo valor ideal se sabe antes de correr) y la regla de cuándo conviene (capítulo 21).
- **La escala misma** (capítulos 18, 23, 26, 27): lecturas que separan cosas que la lectura cruda mezcla. La temperatura del error de lectura, el T1 del ruido unital, la deriva térmica de un ataque.

29.2. Restauración exacta bajo T1

Con el mismo T1 en todos los qubits, el filtro devuelve exactamente la lectura sin ruido en cada sector (capítulo 21, verificado a 10^{-12} m-qg). En clasificación, las notas (§80) lo midieron en 60 corridas pareadas (5 semillas, 3 particiones, 4 conjuntos de datos), con predicciones registradas antes de correr:

- con el modelo de peso 1, entrenado sin ruido y leído bajo T1, qang recupera **+2,5 puntos** de precisión (intervalo de 95 %: +0,8 a +4,1), hasta la precisión exacta de 0,952;

- con el modelo de peso 2 recupera **+16,5 puntos** (+11,8 a +21,2), de 0,757 a 0,922;
- con desfase, +12,6 y +22,6 puntos;
- si se entrena con el ruido, la diferencia desaparece (+0,1 y −0,1 puntos): **la ventaja es no tener que entrenar con el ruido**, no una precisión mayor que la alcanzable.

Las cinco predicciones se cumplieron. Las cifras del índice (“+2,5 y +16,5 en 60 corridas”) están en §80, tal cual.

El gradiente, también (§112). Bajo T1 igual, el filtro devuelve exactamente el gradiente sin ruido; sin el filtro, en peso 1 el gradiente es K veces más chico. Es la meseta estéril por ruido, y el filtro la cambia por disparos: el costo para resolver el signo del gradiente pasa de crecer como $1/K^2$ a crecer como $1/K$ (Sección 23.8). En las notas, el filtro necesitó menos disparos en 10 de 12 casos; con media ocupación y $K \leq 0{,}14$ necesitó entre 1,3 y 2,2 veces más (T5 falló).

29.3. Menos error en las lecturas de dispositivos simulados

El script recalcula el factor de reducción del error (crudo sobre filtro más corrección de lectura) en cada dispositivo de cada corrida guardada:

Tabla 29.1: Error crudo sobre error con filtro más lectura, recalculado de las corridas guardadas.

estudio	dispositivos	mínimo	mediana	máximo
10 circuitos de peso 1 (§137)	3	3,99	4,66	8,07
flota IBM (§144)	17	2,45	3,12	6,11
espectro PCA (§146)	21	1,57	4,63	7,67
Trotter XY, mejor error (§147)	21	1,59	2,04	2,82
test de inversión (§149)	6	3,84	4,55	11,24

estudio	dispositivos	mínimo	mediana	máximo
neutrinos de 3 sabores (§151)	3	2,97	3,43	3,83
neutrino estéril (§163)	3	5,55	5,61	5,68
neutrinos en IQM Garnet (§165, hardware real)	1	—	**1,59**	—

- **El filtro nunca empeoró el error** en ninguno de los 74 casos (un mismo dispositivo simulado aparece en varios estudios). Bajó entre 1,6 y 11 veces.
- **En hardware real ganó menos** (1,59 veces): el chip era mejor que su modelo simulado (error crudo 0,062 contra 0,126), así que menos disparos salían del sector. El error que queda está dentro del sector, donde el filtro no ve.
- La flota de IBM, tomando el mejor entre filtro solo y filtro más lectura, da 2,4 a 9,0 veces (las notas: 2,4–8,9). El rango "2,7–3,6×" que anunciaba el índice no está en las notas: las cifras son las de esta tabla. Para el clasificador de §85 las notas dan 2,9–3,6 veces en el error de la lectura, con la precisión igual (0,933) con y sin qang.

29.4. Errores dentro del sector: el eco

Lo que el filtro no ve, el eco lo mide (capítulo 22). Con la red de peso 1 sobre 189 entradas y 1000 disparos, en cinco dispositivos simulados, las decisiones distintas de la red sin ruido son **15 sin qang, 7 con el filtro y 3 con el filtro más el eco**, sobre 945 lecturas (§106). El eco quita entre 43 y 56 % del error del valor de decisión que deja el filtro. No sirve con entradas de margen estrecho, cuando el error filtrado ya está cerca de su ruido de disparo (§108).

29.5. Caracterización y control

Estas ventajas son de la escala misma, sin filtro (capítulo 27):

- **Temperatura y lectura**: el barrido con heraldo mide el error de lectura sin sesgo y la temperatura efectiva a 1 mK, donde la calibración estándar infla el error en $p \cdot b$ y ve el qubit a 0 mK.

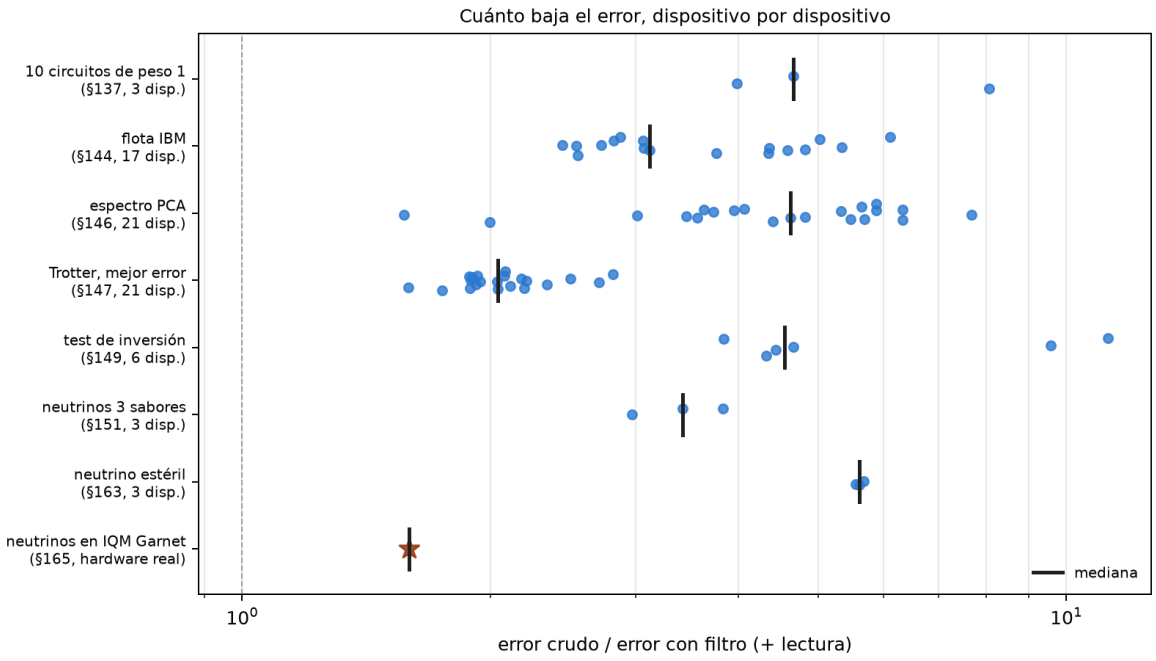


Figura 29.1: Factor de reducción del error con el filtro, dispositivo por dispositivo, en siete estudios con modelos de ruido simulados y en la corrida real en IQM Garnet (estrella). Las barras son medianas.

- **Diagnóstico del T1 sin simulación clásica**: la lectura media distingue T1 de ruido unital con 88 % de acierto con 100 disparos y ruido fuerte, contra 70–76 % de XEB y HOP, que además necesitan la distribución ideal. Con ruido realista nada distingue los dos sobre circuitos arbitrarios.
- **Cuantización del control**: una grilla pareja en qg baja la distancia de variación total al cargar una distribución en 43 de 45 casos (mediana 1,56 veces), y el peor error de probabilidad en un factor exacto $\pi/2$. Pierde en fidelidad cerca de los polos.

29.6. Neutrinos: mitigación sin circuitos extra

Las oscilaciones de neutrinos en un circuito conservan el peso, así que el filtro se aplica sin agregar ningún circuito. Con tres sabores (§151), el error baja 3,4 veces en la mediana de tres dispositivos simulados (el índice decía 3 veces); con un neutrino estéril (§163), 5,6 veces, y la caída de supervivencia aparece en la energía correcta en los tres. **En IQM Garnet** (§165), con hardware real, el filtro baja el error 1,59 veces y devuelve el máximo de oscilación a 2,6 GeV (exacto 2,63), donde la lectura cruda lo ponía en 0,8 GeV. Es la única de estas ventajas confirmada en hardware. Las otras dos corridas en Garnet (§168 y §170, 8 de 9 predicciones) probaron la escala y la lectura, no una ventaja: muestran que el mili-qang mide un chip real, no que qang lo mejore.

29.7. BB84: menos falsas alarmas ante la deriva térmica

En BB84, la suma $qg(0) + qg(1)$ de los estados enviados en Z es un testigo de T1: la relajación sólo produce errores 1→0, y un ataque de interceptar y reenviar produce errores simétricos (notas §40, capítulo 17). Con ventanas de 2000 bits y 1 % de falsas alarmas en la línea de base:

Tabla 29.2: Fracción de ventanas con alarma (notas §40, de la caché del capítulo 17).

escenario	monitor de QBER	monitor qg
línea de base	0,007	0,006
deriva T1, γ 0,02 → 0,04	0,478	**0,009**
deriva T1, γ 0,02 → 0,06	0,962	**0,006**
interceptar y reenviar, $f = 0{,}05$	0,861	0,823
interceptar y reenviar, $f = 0{,}10$	1,000	0,994
ataque que imita al T1	**0,962**	0,006

El monitor qg detecta el ataque igual que el de QBER y **no salta cuando sólo empeora el T1 de la memoria**, donde el de QBER salta en 48–96 % de las ventanas. El precio está escrito: un atacante que imita al T1 pasa inadvertido para el monitor qg y no para el de QBER. Los dos son complementarios, y no hay ganancia de seguridad: la tasa de clave cae igual en los dos casos.

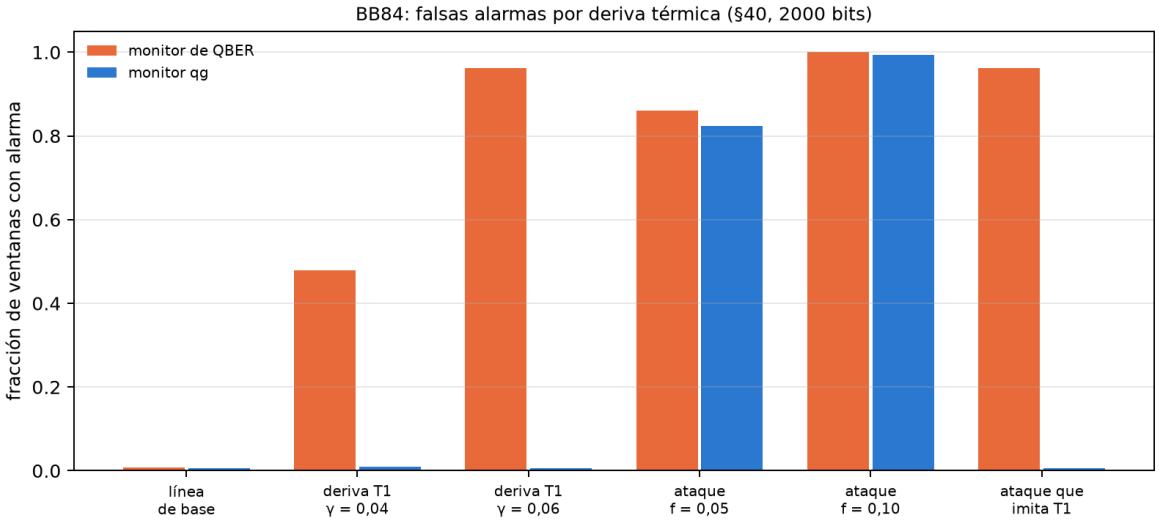


Figura 29.2: Fracción de ventanas con alarma para el monitor de QBER y el monitor qg en seis escenarios de BB84 con 2000 bits; el monitor qg no salta con la deriva térmica y tampoco con un ataque que la imita.

29.8. Lo que queda pendiente

De todas estas ventajas, sólo la de neutrinos está confirmada en hardware real, una vez, con 300 disparos por circuito. Las que más conviene llevar a un dispositivo son la caracterización con heraldo (la población térmica no existe en los simuladores) y el filtro en un circuito de varias excitaciones.

29.9. Sin qang y con qang

Tabla 29.3: Las ventajas confirmadas y sus límites.

ventaja	sin qang	con qang	tamaño	dónde deja de valer
precisión bajo T1 sin reentrenar	0,928 / 0,757 (pesos 1 / 2)	0,952 / 0,922	+2,5 / +16,5 puntos	con T1 desigual pierde ≤ 1 punto; entrenando con ruido, ninguna
error de las lecturas (simulado)	crudo	filtro + lectura	1,6 a 11 veces, nunca peor	error dentro del sector
error en hardware real	0,062	0,039	1,59 veces	chips mejores que su modelo ganan menos
gradiente bajo T1	K veces más chico	exacto con el filtro	disparos de $1/K^2$ a $1/K$; 10 de 12 casos	media ocupación con $K \leq 0{,}14$ (§112)
decisiones de un clasificador	15 de 945 distintas	3 con filtro y eco	5 veces menos	margen estrecho (§108)
lectura y temperatura	e_{01} inflado, 0 mK	sin sesgo, a 1 mK	—	necesita medición a mitad de circuito
diagnóstico del T1	0,70–0,76 con simulación ideal	0,88 sólo con conteos	+12–18 puntos	ruido realista: azar
cargar distribuciones	grilla en θ	grilla en qg	43 de 45, mediana 1,56 veces	fidelidad cerca de los polos
alarmas en BB84	48–96 % de falsas alarmas por deriva	0,6–0,9 %	—	un ataque que imita al T1

Balance. Las ventajas son reales y medidas, pero de dos clases. Las del filtro son las más grandes (hasta 11 veces en simulación) y pertenecen a la verificación de

simetría, conocida; qang aporta el testigo y la regla. Las de la escala misma son más chicas y más propias: separar temperatura de lectura, T1 de ruido unital y deriva de ataque. Sólo una ventaja pasó por hardware real, y ahí ganó menos que en simulación. Esa es la cifra que hay que mirar primero.

29.10. En código

```
import json

d = json.load(open("examples/data/iqm_neutrino_qg_run.json"))
d["raw_error"] / d["filtered_error"]    # 1,59: el filtro en IQM Garnet, hardware real
d["kept"]                              # 0,88 de los disparos conservados
```

29.11. Resumen

- Bajo T1 igual, qang recupera la precisión sin ruido sin reentrenar: +2,5 puntos con peso 1 y +16,5 con peso 2 en 60 corridas.
- El filtro baja el error de las lecturas entre 1,6 y 11 veces en 74 casos de dispositivos simulados, sin empeorarlo nunca; en hardware real, 1,59 veces.
- El eco lleva las decisiones erróneas de 15 a 3 sobre 945 lecturas.
- Contra la meseta por ruido T1, el filtro devuelve el gradiente exacto y baja el costo en disparos de $1/K^2$ a $1/K$.
- La escala misma separa temperatura de error de lectura, T1 de ruido unital y deriva térmica de un ataque en BB84.
- Cada ventaja tiene escrito dónde deja de valer; el capítulo 30 junta los resultados negativos.

Notas bibliográficas

La restauración bajo T1 es una verificación de simetría (Bonet-Monroig et al. 2018; McArdle et al. 2019); el eco, Hahn (1950). La resolución de los neutrinos usa los parámetros de Esteban et al. (2020), y el monitor BB84, el protocolo de Bennett y Brassard (2014) y la prueba de Shor y Preskill (2000). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

30 Límites estructurales, equivalencias y resultados negativos

El capítulo 29 juntó lo que dio un beneficio medible. Este junta lo que no: los puntos ciegos que vienen de la definición misma de la escala, las equivalencias que se presentaron como ventajas y las predicciones que fallaron. Un límite entra si se puede mostrar en código o si está en una corrida guardada, con la misma acción sin qang al lado. Las comprobaciones nuevas están en `tools/make_cap30_figures.py`; el resto se cita de las notas y de los capítulos donde se midió.

30.1. Desde la base: qué no puede ver la escala

La ecuación del capítulo 1 hace de qg una función de una sola probabilidad, p_0, medida en la base Z. De ahí salen dos clases de límites:

- **Lo que vive fuera de las poblaciones en Z.** Las fases relativas y las coherencias no cambian p_0, así que ninguna lectura qg de la base Z las ve. Sólo se ven midiendo en otra base, y entonces ya no es la lectura qg de la base Z. La escala angular qga del capítulo 1 (Sección 1.4) les da una unidad, milésimas de vuelta, pero no las vuelve visibles en Z: cambia cómo se escribe una fase, no qué mide la base Z.
- **Lo que el filtro no alcanza.** El filtro descarta disparos fuera del sector de peso correcto. Un error que deja el disparo en el sector, o un circuito que no conserva el peso, quedan fuera de su alcance.

Ninguno es un defecto de implementación: son consecuencias de la definición.

30.2. Estados de grafo: entrelazamiento invisible en Z

Un estado de grafo es $H^{\otimes n}$ seguido de una CZ por arista. La CZ es diagonal, así que sólo cambia fases: todas las poblaciones en Z quedan en 2^{-n}. El script lo comprueba con el anillo de 6 qubits:

- su distribución en Z coincide con la de $|+\rangle^{\otimes 6}$, que no tiene entrelazamiento, con diferencia **exactamente 0**;
- por eso $qg_Z = 0$ en cada qubit, $qg_S = 1$ y la correlación qg es 0 en los dos estados;
- los estabilizadores $X_i Z_{i-1} Z_{i+1}$ valen **1** en el estado de grafo y **0** en el producto. Distinguen los dos estados, pero se miden en la base X.

Sin qang pasa lo mismo: cualquier estadística de la base Z, cruda o tomográfica, es ciega a este entrelazamiento. qang hereda el límite, no lo crea (notas §8.1). El desfase en la lectura es el mismo punto ciego visto desde el lado del ruido (§10.4).

30.3. qg_S no es monótona bajo T1

Con ruido despolarizante, qg_S (la entropía de la distribución en Z dividida por n) sube hacia 1 a medida que el ruido crece, así que sirve para ordenar dispositivos. Con amortiguamiento (T1) no: primero sube, porque el ruido mezcla, y después baja, porque el T1 empuja todo a $|0 \ldots 0\rangle$, que tiene entropía 0.

El script corre 24 circuitos de volumen cuántico de 4 qubits con amortiguamiento en cada qubit después de cada bloque de dos qubits, con matrices densidad exactas:

- qg_S **sube y baja en los 24.** En el circuito 0 empieza en 0,919, llega a 0,981 con $\gamma = 0{,}06$ y vuelve a 0,923 con $\gamma = 0{,}28$. Sola, no distingue un dispositivo casi sin ruido de uno con mucho T1.
- **El par (**qg_S**,** qg_Z **medio) sí los distingue.** En esos dos puntos el qg_Z medio vale −0,029 y +0,209. El T1 empuja el qg_Z medio hacia +1 y el ruido despolarizante lo deja en 0 (va de −0,029 a 0,000).
- **El arreglo no es un teorema.** En este modelo el qg_Z medio crece de forma monótona en 21 de los 24 circuitos. Las notas, con su modelo de T1 a mitad de circuito, lo encontraron en 23 de 24 (§10.4 D). En los demás tiene escalones pequeños hacia abajo.

30.4. La equivalencia del gradiente natural

El capítulo 23 lo midió y acá queda escrito como límite. Cambiar de coordenada no acelera un optimizador. El gradiente natural escrito en qg es el descenso común en θ, salvo términos de orden η^2 (notas §15.1). Las afirmaciones de que “converge

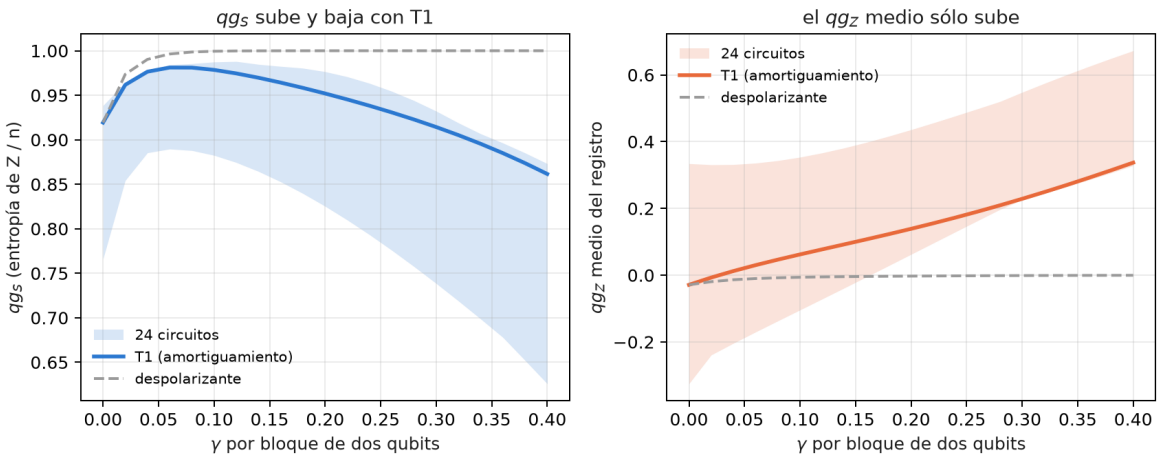


Figura 30.1: Izquierda: qg_S con T1 (azul, banda de 24 circuitos) sube y vuelve a bajar; con ruido despolarizante (gris) sólo sube. Derecha: el qg_Z medio sube con T1 y se queda en 0 con ruido despolarizante.

en qg donde θ no converge" venían de recortar θ a $[0, \pi]$. Eso esconde los mínimos con $\theta < 0$, y sin el recorte el descenso en θ converge.

En la corrida pre-registrada de §159, con 20 semillas del modelo de Ising de 4 qubits:

- el descenso en θ llegó en 103 pasos (mediana);
- el descenso en qg no llegó nunca;
- el gradiente natural con la métrica completa, en 22,5 pasos.

Esa ganancia es del gradiente natural y no de qang: la métrica completa no se lee en qg. La versión que sí se lee de correladores qg (bloques qg_{YY}) tardó 79,5 pasos. Mejoró 1,3 veces sobre θ, no las 1,5 que se habían predicho (G2 falló).

30.5. El filtro no alcanza los circuitos profundos

En el capítulo 25 el filtro de número de electrones bajó tres veces el error de H_2 y no le hizo nada a LiH. Las notas (§50) separaron las causas, y la principal resultó ser el **alcance**: el filtro actúa sobre los disparos medidos en Z, y en LiH el error está en los grupos medidos en X e Y.

Tabla 30.1: Error de energía con lectura corregida y 200 000 disparos (notas §50).

caso	compuertas de 2 qubits	error en el grupo Z, crudo → filtrado	grupos X/Y	total crudo → con filtro (mHa)
H_2, todos con todos	3	13,0 → 4,9	0,9	13,9 → 5,9
LiH, todos con todos, 1 capa	20	−2,2 → −1,9	26,2	24,0 → 24,3
LiH, todos con todos, 3 capas	60	−20,8 → −12,4	97,4	76,6 → 85,0
LiH, heavy-hex, 3 capas	60	−30,5 → −18,0	165,8	135,3 → 147,9

- **No es el enrutamiento.** El ansatz de LiH es de primeros vecinos y necesita las mismas 60 compuertas sin enrutar.
- **El remedio qg para los grupos X/Y falla.** Reescalarlos con la fuerza despolarizante que se lee de la fracción conservada corrige de más, entre 2 y 3 veces (de +97 a −124 mHa). El ruido local de compuerta no es despolarizante global.
- **Hubbard llega a la misma pared** (§29). En fake_brisbane, desde 4 pasos de Trotter (188 ECR o más, 18 % de los disparos conservados), todos los métodos quedan en el piso de ruido: la doble ocupación tiende a 1/4 y el desbalance de carga a 0.

Con moléculas más grandes, los grupos X/Y son cada vez más y cargan la mayor parte de la energía de correlación. Un filtro en Z alcanza una parte cada vez menor del error.

30.6. La red de peso 1 es clásica

El filtro protege exactamente del T1 a una red neuronal cuántica que conserva el peso (capítulo 20). El mismo motivo la hace simulable. En el sector de peso 1 la red es una matriz ortogonal O que actúa sobre los datos cargados v, y cada lectura vale $qg_Z^{(i)} = 1 - 2\,(Ov)_i^2$. Es una **forma cuadrática** en v que se calcula

en $O(n^2)$ (notas §76, F2). El script lo comprueba en circuitos de 5 qubits, con cargador unario y red RBS al azar: el error máximo es $7{,}8 \cdot 10^{-16}$.

- §75: el mejor modelo clásico iguala o supera a la mejor red cuántica en los cuatro conjuntos de datos (en dígitos, SVM con núcleo RBF 0,963 contra 0,933). No hay ventaja cuántica.
- §76: la predicción Q3 decía que la red no superaría a su gemelo cuadrático por más de 1 punto, y falló, pero por la línea de base. El gemelo usaba la regularización por defecto. Corrido después del resultado con $C = 100$, queda a entre 0,3 y 1,6 puntos de la red.
- Con peso 2 la salida es de cuarto grado y deja de ser trivial. Aun así, el techo de la codificación se acota con una forma cuadrática sobre los productos de amplitudes (§87).

El filtro aporta robustez a redes chicas en hardware ruidoso. No aporta supremacía.

30.7. Dónde el filtro no se aplica: fases y cifrado clásico

El filtro exige que cada compuerta conserve el peso de Hamming. El analizador de qang (`qang.ibm.WeightPreservationCheck`) lo decide compuerta por compuerta antes de correr:

Tabla 30.2: Lo que decide el analizador de qang.

circuito	¿conserva el peso?	compuertas que lo rompen
QFT de 4 qubits	no	4
QPE de la compuerta T, 3 qubits de conteo	no	6
GHZ de 4 qubits	no	4
volumen cuántico de 4 qubits	no	8
neutrinos de 3 sabores (capítulo 9)	sí	0
cargador unario + red RBS	sí	0

La estimación de fase y todo lo que se apoya en ella (Shor, HHL) empieza con Hadamards, que mezclan todos los pesos. Ahí la escala aporta una lectura cerrada de la fase, $qg_\Phi = e^{i2\pi\varphi}$, invertible en todo su dominio (notas §13). Esa lectura es la que QPE calcula con un circuito, pero no reduce el error de QPE. La criptografía post-cuántica (capítulo 16) es aritmética clásica: no hay qubits ni operadores, así que qang no tiene nada que leer.

30.8. Las predicciones falladas de §157–§164

En las ocho corridas pre-registradas de §157–§164 se cumplieron **26 de 45 predicciones**, según los veredictos que guardó el código. Las 19 falladas:

- **Teleportación por red óptica pasiva** (§157, Q5): 5 de 24 casos lejos del óptimo, todos donde la fidelidad ideal es 1 (medida entre 0,897 y 0,957). El circuito no conserva el peso, así que el único filtro es el anuncio de pérdida.
- **Doble riel** (§158, siete falladas): la fidelidad que se lee de tres correladores predice la de la teleportación con diferencias de 0,029 o menos, pero no la descompone (A1–A3). Los anuncios falsos ponen un piso (B1, B2, B5).
- **Gradiente natural** (§159, G2): 1,3 veces contra las 1,5 predichas.
- **Área de pulso** (§160, P4): la vuelta de período π de RZZ ahorra 1,14 veces en error contra las 1,5 predichas.
- **Kernels** (§161, K2–K4): la precisión casi no cambia con la reparación y la alineación con el objetivo no ve el encogimiento; K4 falló por sus umbrales, no por su dirección.
- **VarQTE** (§162, V1): el ansatz no es lo bastante expresivo a tiempos largos (fidelidad sin ruido 0,934 en $t = 2$).
- **Neutrinos** (§163, O3): los valores filtrados quedan entre 0,010 y 0,033 por encima, por el error dentro del sector.
- **Bucles temporales y agujeros negros** (§164, cuatro falladas). En FakeTorino la paradoja no se suprime del todo: el éxito en $\varphi = \pi$ es 0,056 donde la predicción pedía cerca de 0 (C2), y la rotación controlada da 0,600 donde el valor exacto es 1 (C3). El decodificador funcionó en los tres dispositivos (H2, H3); H1 falló por 0,001.

Las tres corridas en hardware real que vinieron después, en IQM Garnet, cumplieron 12 de 13 predicciones: los neutrinos de §165 (4 de 4), el milli-qang de §168 (3 de 4) y $E = mc^2$ como lectura en §170 (5 de 5). La fallada es M2 de §168: las copias repetidas del ecuador se dispersaron la mitad de lo que permite el ruido de disparo, y sigue sin explicación (capítulo 28).

30.9. Lista consolidada de limitaciones

La lista de las notas (§14), con lo que agregó el libro:

1. **Singularidad del jacobiano** en $\theta \in \{0, \pi\}$: regularizarla cuesta exactitud cerca de los polos (capítulo 23).
2. **Trampa del rango de arccos**: las actualizaciones en qg no llegan a $\theta < 0$; en H_2 pierden toda la energía de correlación (§8.2).

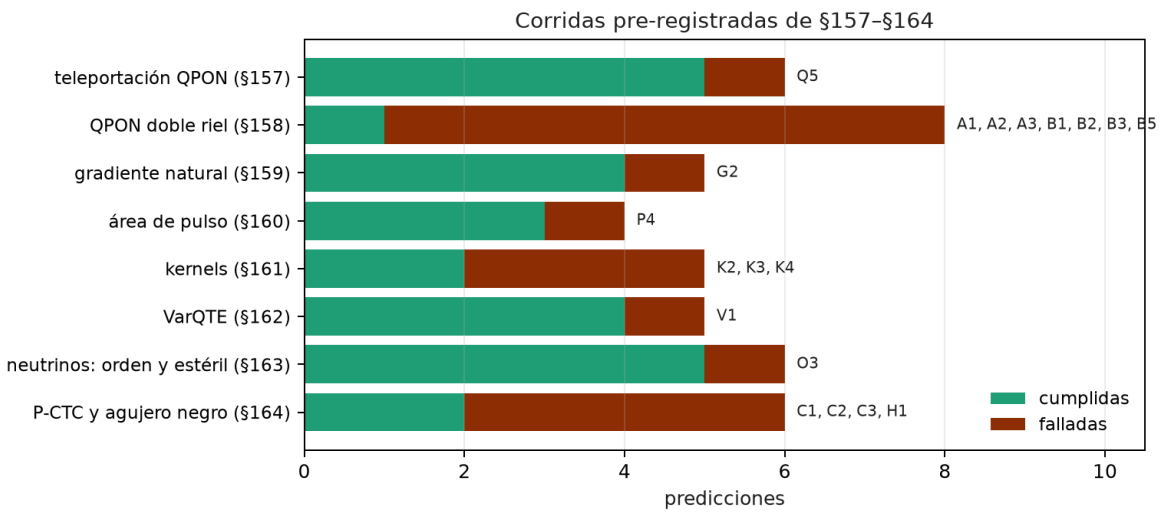


Figura 30.2: Predicciones cumplidas y falladas en las ocho corridas pre-registradas de §157–§164, leídas de los veredictos guardados; a la derecha, las que fallaron.

3. **Ceguera a la base Z**: el entrelazamiento de los estados de grafo y el desfase en la lectura son invisibles para qg_Z, qg_S y la correlación qg.
4. **La correlación qg no mide entrelazamiento**: es positiva en mezclas clásicas y vale 0 en estados de grafo (§7.2).
5. qg_S **no es monótona bajo T1**: hay que leerla junto con el qg_Z medio, y ese par es monótono en 21 a 23 de 24 circuitos, no en todos.
6. **Sesgo de** qg_S **con disparos finitos**: se corrige con Miller–Madow (§10.2).
7. **El amortiguado en los polos** cuesta entre 3 y 20 veces más iteraciones cuando el óptimo está en un polo (§9).
8. **Ninguna ventaja de velocidad ni de energía**: qg no cambia cuántos disparos pide una precisión dada (§14, punto 9; §15.3).
9. **Alcance del filtro**: sólo actúa en circuitos que conservan el peso y sobre lo medido en Z; no ve el error dentro del sector.
10. **Las redes que admiten el filtro son simulables** en peso 1.
11. **En hardware real el filtro ganó menos que en simulación** (1,59 veces contra 2,2 en el modelo de IQM, capítulo 31).
12. **La corrección desde los polos no ve el error que depende del ángulo**: en Garnet, R_y leyó entre 16 y 71 m-qg bajo en ángulos intermedios, con la lectura ya corregida (§168, §170; capítulo 27).
13. **Donde qang evita una meseta estéril, el problema es simulable**: el costo local qg con circuitos cortos y el sector de peso 1. Contra la meseta por ruido T1, el filtro devuelve el gradiente exacto, pero paga con disparos

$(1/K)$ (Sección 23.8).

30.10. Sin qang y con qang

Tabla 30.3: Los límites, con y sin la escala.

límite	sin qang	con qang	diferencia
estados de grafo	lectura en Z ciega	$qg_Z = 0$, $qg_S = 1$, igual que el producto	ninguna: el límite es de la base Z
T1 contra ruido unital	entropía en Z, no monótona	par (qg_S, qg_Z medio)	separa los dos casos en 21–23 de 24 circuitos
optimización	descenso en θ, 103 pasos	gradiente natural en qg = descenso en θ	ninguna aceleración propia
LiH, 60 compuertas	76,6 mHa	85,0 mHa con filtro	el filtro empeora: el error está en X/Y
red de peso 1	modelos clásicos	forma cuadrática exacta	no hay ventaja cuántica
QPE, Shor, HHL	estimación de fase	qg_Φ cerrada, filtro inaplicable	lectura nueva, sin mitigación
§157–§164	—	26 de 45 predicciones	19 falladas, publicadas

Balance. Casi todos los límites tienen la misma raíz: qg lee una probabilidad de la base Z, y lo que no está en esa probabilidad no lo ve. Los resultados negativos no se esconden: 19 de las 45 predicciones de §157–§164 fallaron y quedan escritas. Varias “ventajas” que se ofrecían como propias de qang (el gradiente natural, la supremacía de la red de peso 1) resultaron ser equivalencias.

30.11. En código

```
import math
from qiskit.transpiler import PassManager
```

```
from qang import ibm, neutrino as nu

pm = PassManager([ibm.WeightPreservationCheck()])
pm.run(nu.three_flavour_circuit("mu", 1300.0, 2.6, -math.pi / 2))
pm.property_set["qg_weight_preserving"]      # True: el filtro se aplica
```

30.12. Resumen

- El entrelazamiento de un estado de grafo es invisible en Z: su distribución coincide exactamente con la de $|+\rangle^{\otimes n}$.
- qg_S sube y baja bajo T1 en los 24 circuitos probados; el par con el qg_Z medio los separa, sin ser un teorema.
- El gradiente natural en qg es descenso en θ: cambiar de coordenada no acelera.
- En LiH el error está en los grupos X/Y, fuera del alcance del filtro; Hubbard choca con la misma pared desde 4 pasos.
- La red de peso 1 que el filtro protege es una forma cuadrática clásica.
- En las corridas de §157–§164 fallaron 19 de 45 predicciones; en las tres de hardware real (§165–§170), 1 de 13.
- Donde qang evita una meseta estéril, el problema es simulable; contra la meseta por ruido, el filtro paga con disparos.

Notas bibliográficas

Los estados de grafo son Hein et al. (2004); el volumen cuántico, Cross et al. (2019). La equivalencia del gradiente natural es con Stokes et al. (2020), y la simulabilidad clásica de los modelos sin mesetas, Cerezo et al. (2023). QFT y QPE siguen Nielsen y Chuang (2010). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

31 Primer experimento en hardware real: IQM Resonance

Hasta acá, casi todo el libro se midió en simuladores con modelos de ruido de dispositivos. Este capítulo cuenta cómo se llevó qang a un chip superconductor real, Garnet de IQM (20 qubits), con créditos de prueba: por qué ese equipo, cómo se ensayó gratis, cuánto costó y qué salió. Las cifras se recalculan de los archivos guardados de las corridas con `tools/make_cap31_figures.py`. No se envía nada a IQM y no hace falta `iqm-client` para verificarlas.

31.1. Desde la base: qué se lleva al chip

La lectura de un qubit real es la misma del capítulo 1: se cuentan ceros y unos, y $qg_Z = 2p_0 - 1$. Lo que cambia es todo lo que rodea esa cuenta: el circuito se compila a las compuertas nativas del chip, la lectura tiene errores propios y cada disparo cuesta créditos. qang aporta tres cosas, todas en el posprocesamiento:

- el **filtro de peso**, si el circuito lo conserva;
- el **testigo** que dice cuánto quitó el filtro (la fracción conservada);
- la **lectura en m-qg**, donde una diferencia de probabilidad de 0,0005 es 1 m-qg.

31.2. Por qué IQM, y qué cuesta compilar

Garnet tiene compuertas nativas PRX (una rotación de un qubit, `r` en Qiskit) y CZ, sobre una red cuadrada. El experimento elegido (neutrinos de tres sabores) usa compuertas XX+YY, que conservan el peso. El script compila en una línea de tres qubits a los tres juegos nativos:

Tabla 31.1: Compuertas de dos qubits después de compilar (`seed_transpiler` 137).

juego nativo	RBS	XX+YY	circuito de neutrinos, nivel 1	nivel 3
IQM (r, cz)	2	2	18	12
IBM Heron (cz, rz, sx, x)	2	2	18	12
IBM Eagle (ecr, rz, sx, x)	2	2	18	12

Las notas (§165) contaban 12 CZ en IQM contra 18 compuertas de dos qubits en IBM. **La diferencia no es del chip**: el ensayo de IQM se compiló con el nivel de optimización 3 y las corridas de IBM de §151 con el nivel 1. Con el mismo nivel, los tres juegos dan lo mismo: las seis XX+YY del circuito cuestan dos compuertas de dos qubits cada una. IQM se eligió por los créditos disponibles, no por una compilación más barata.

31.3. El módulo `qang.iqm`

El índice anunciaba un módulo `qang/iqm.py`, análogo a `qang/ibm.py`. Las dos corridas de este capítulo se hicieron sin él: los scripts `examples/iqm_neutrino_qg.py` y `examples/iqm_milliqang_qg.py` leen los conteos con `qang.interop` (`canonical_counts`, `qg_z_profile`, `filtered_qg_z_profile`, `weight_filter`). El módulo se escribió después, con lo que esas corridas dejaron pendiente:

- **Corrección de lectura.** En §165 no la hubo: los modelos simulados de IQM no publican los errores de lectura en el `target` de Qiskit, donde los busca `qang.ibm`, sino en un perfil de errores propio. `qang.iqm.readout_errors` los lee de ahí. Para un dispositivo real, `pole_circuits` y `readout_from_poles` los miden con dos circuitos, todos los qubits en $|0\rangle$ y todos en $|1\rangle$, como se hizo en §168. Con los conteos guardados de §168 da $e_0 = 0{,}0055$ y $e_1 = 0{,}029$. `iqm_qg` aplica la inversión de `qang.ibm` y da las cuatro lecturas: cruda, corregida, filtrada y filtrada después de corregir.
- **Elección de la cadena.** `best_chain` compara la disposición por defecto con cadenas de la red cuadrada y se queda con la de mayor fracción conservada prevista (`predict_kept_fraction`, con las compuertas y unidades de IQM).

- **El paso que conserva el peso.** La compuerta nativa de un qubit de IQM no conserva el peso compuerta por compuerta, así que `check_weight` revisa el circuito antes de compilar.

El ensayo gratis en el modelo de Garnet (`examples/iqm_readout_chain_qg.py`, los ocho circuitos de §165, 4000 disparos) da error crudo 0,124, filtrado 0,055 y **filtrado después de corregir la lectura 0,047**: la corrección que faltaba en §165 quita otro 15 %. La fracción conservada simulada es 0,689 y la prevista queda entre 0,640 y 0,775, menos ajustada que en IBM. La elección de cadena casi no distingue entre cadenas (0,777 contra 0,775), porque los qubits del modelo son casi iguales. Nada de esto se probó todavía en el chip real.

31.4. Ensayo gratis antes de gastar

IQM publica modelos simulados de sus chips. El circuito de neutrinos se corrió primero ahí, con 4000 disparos y 8 energías (docstring de `examples/iqm_neutrino_qg.py`):

Tabla 31.2: Ensayo en los modelos simulados de IQM (2026-10-20).

modelo	parecido a	error crudo	error filtrado	factor	conservado
IQMFakeApollo	Garnet	0,1263	0,0584	2,16	0,688
IQMFakeAphrodite	Emerald	0,1161	0,0515	2,25	0,708

El ensayo del milli-qang (§168) también pasó sus cuatro predicciones en los dos modelos antes de correr en el chip.

31.5. El presupuesto: lo planeado y lo gastado

La cuenta empezó con 30 créditos. El plan era gastar un 10 % en pruebas, un 60 % en el experimento principal y guardar un 30 % de reserva. El token se lee sólo de la variable de entorno `IQM_TOKEN`, y ningún script gasta créditos sin la bandera `--yes-i-accept-qpu-cost`.

Tabla 31.3: Créditos de IQM Resonance. El costo de la corrida de neutrinos no está escrito: es la diferencia entre dos saldos. El de §170 tampoco: es la estimación de las notas con la tarifa de §168.

paso	disparos	créditos	saldo
prueba de neutrinos	100	0,50	29,50
corrida de neutrinos	2400	0,50	29,00
prueba del milli-qang	100	0,50	28,50
corrida del milli-qang	104 000	16,00	12,50
corrida de $E = mc^2$ (§170, apéndice G)	48 000	≈ 7,7 (estimado)	≈ 4,8

- **Gastado hasta §168:** pruebas, 3,3 %; corridas, 55,0 %; quedaban 12,50 créditos (41,7 %). El plan se cumplió con margen. La corrida de §170 (Sección G.6) gastó unos 7,7 más, fuera del plan del capítulo, y quedan unos 4,8.
- **El modelo de costo se corrigió con datos.** La primera estimación, 0,50 créditos por trabajo, venía de trabajos chicos y estaba mal. El costo crece con los disparos (unos 0,15 créditos cada 1000) y tiene un piso de unos 0,50 por trabajo.

31.6. El experimento principal: neutrinos de tres sabores

Es el circuito del capítulo 9 (§151): un ν_μ inicial, 1300 km de base, $\delta_{CP} = -\pi/2$, ocho energías entre 0,8 y 5 GeV, y los tres sabores leídos a la vez. Tiene 3 qubits, 12 CZ y todas sus compuertas conservan el peso. El script quedó congelado (sha256 b320f51f en `examples/data/iqm_neutrino_qg.prereg`, commit a74c07c) antes de enviar ningún trabajo, con cuatro predicciones:

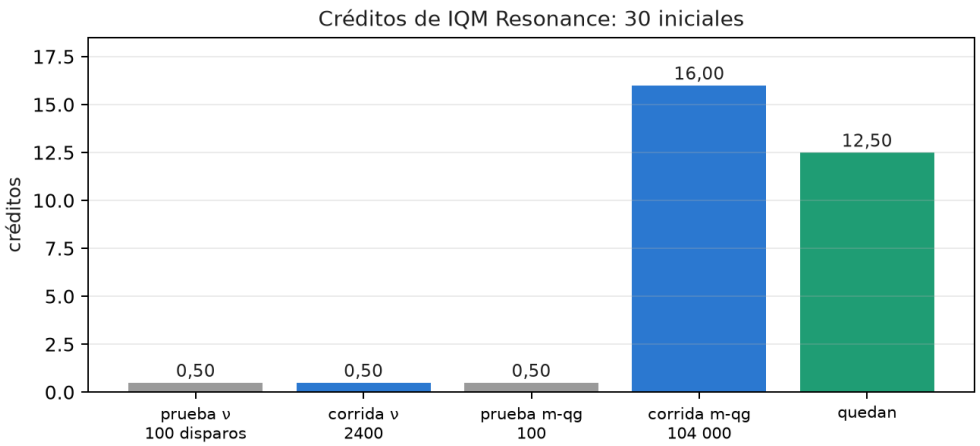


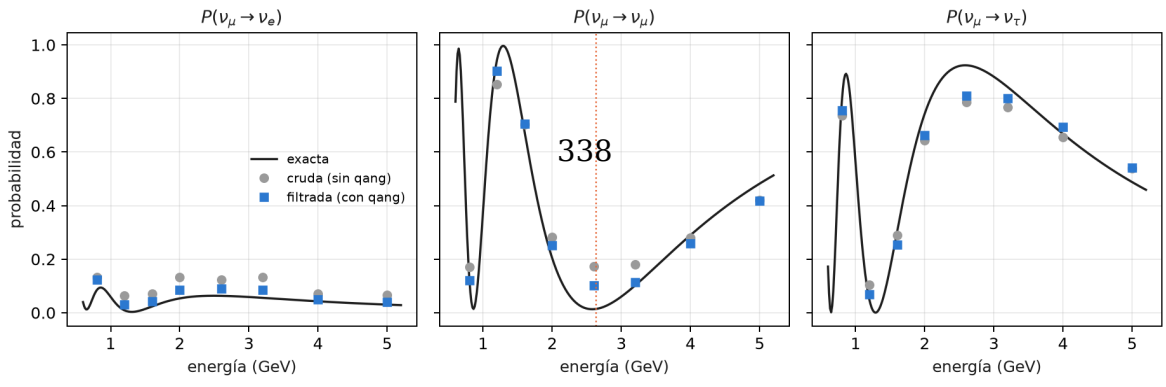
Figura 31.1: Créditos gastados en cada paso de las dos corridas en Garnet y los que quedan, sobre 30 iniciales.

Tabla 31.4: Trabajo 01a15b04, Garnet, 8 circuitos × 300 disparos, 2026-10-20. Las cuatro se cumplieron.

predicción	resultado
I1: el error filtrado queda por debajo del crudo	0,0386 < 0,0615
I2: el cociente crudo / filtrado es al menos 1,5	1,59 (por poco)
I3: la supervivencia filtrada tiene su mínimo en 2,6 GeV	sí; **la cruda, en 0,8 GeV**
I4: se conserva al menos la mitad de los disparos	0,880

El script recalcula todo desde el archivo guardado:

- **Por sabor**, el filtro baja el error de ν_e de 0,054 a 0,023 y el de ν_μ de 0,069 a 0,041. El de ν_τ casi no cambia (0,062 → 0,052).
- **El máximo de oscilación vuelve a su lugar.** Sin filtro, la supervivencia más baja se lee en 0,8 GeV. Con filtro se lee en 2,6 GeV, y el máximo exacto está en 2,63.
- **Lo que queda está dentro del sector.** En 2,6 GeV la supervivencia exacta es 0,013, la cruda 0,173 y la filtrada 0,101. El filtro no ve ese error (capítulo 22).



31.7. Lo que vino después, y lo que queda

- **El milli-qang en Garnet** (§168, capítulo 28) usó la mayor parte de los créditos. Se cumplieron 3 de 4 predicciones: una X cuesta 1,64 m-qg y el costo crece en línea recta con el número de compuertas. La dispersión de las copias en el ecuador fue la mitad de la esperada (M2 falló), y eso sigue abierto.
- $E = mc^2$ **como lectura en Garnet** (§170, apéndice G): 24 circuitos de 2000 disparos en el mismo qubit, con el pre-registro subido en su propio commit antes del trabajo. Se cumplieron las 5 predicciones, con un sesgo de compuerta de 26 a 71 m-qg en la misma dirección que en §168. Costó unos 7,7 créditos.
- **La réplica en cinco qubits y dos días** está preparada en `examples/iqm_milliqang_replication_qg.py`, todavía sin pre-registrar ni correr. A tamaño completo (130 circuitos × 4000 disparos por día) costaría unos 80 créditos por día, mucho más de lo que queda: hay que achicarla antes de usarla.
- **Los candidatos del índice** siguen pendientes: la P-CTC con un qubit (§164), el decodificador de Yoshida–Kitaev (8 qubits y 90 compuertas de dos qubits en los modelos de IBM, probablemente demasiado profundo) y H_2 (§20, §128). La corrida de H_2 en IonQ fue rechazada antes de aceptar ningún trabajo y no se cobró nada.

Con unos 4,8 créditos después de §170 y unos 0,15 cada 1000 disparos quedan unos 30 000 disparos, menos los pisos por trabajo.

31.8. Resultado: aciertos, fallos y comparación con la simulación

Tabla 31.5: El mismo circuito en simulación y en el chip.

	modelos de IBM (§151)	modelo de IQM (ensayo)	Garnet (real)
error crudo	—	0,126	**0,062**
factor del filtro	2,97–3,83	2,16	**1,59**
disparos conservados	—	0,688	0,880

El chip fue mejor que su modelo: tuvo la mitad de error crudo, y por eso salieron menos disparos del sector y el filtro tuvo menos para quitar. Es la regla del capítulo 21 vista en hardware: el filtro rinde en proporción al ruido que saca

del sector. Una sola corrida, un día, 300 disparos por circuito: no hay afirmación sobre la estabilidad.

31.9. Sin qang y con qang

Tabla 31.6: La corrida en Garnet, con y sin la escala.

acción	sin qang	con qang	diferencia
error medio de las probabilidades	0,0615	0,0386	1,59 veces menos
energía del máximo de oscilación	0,8 GeV	2,6 GeV (exacta 2,63)	el filtro corrige la física que se lee
error de ν_τ	0,062	0,052	casi nada: es error dentro del sector
costo	2400 disparos, 0,50 créditos	los mismos disparos	ninguno: el filtro es posprocesamiento
disparos útiles	2400	2113 (88 %)	se descarta un 12 %
compilación	12 compuertas de dos qubits	12	ninguna: depende del nivel de optimización

Balance. El primer dato en hardware real confirma lo que la simulación decía, con un efecto más chico: 1,59 veces contra 2,2 en el modelo de IQM y entre 3 y 3,8 en los de IBM. El filtro no cuesta disparos extra y pone la oscilación en la energía correcta. Del plan original, la ventaja de compilación de IQM era un artefacto del nivel de optimización, y el módulo `qang.iqm` se escribió después de las corridas, que no lo usaron.

31.10. En código

```
import json
import numpy as np
```

```
d = json.load(open("examples/data/iqm_neutrino_qg_run.json"))
raw, fil, ex = (np.array(d[k]) for k in ("raw", "filtered", "exact"))
np.abs(raw - ex).mean(), np.abs(fil - ex).mean()   # 0,0615 y 0,0386
d["energies"][int(np.argmin(fil[:, 1]))]       # 2,6 GeV: el máximo de oscilación
```

31.11. Resumen

- En Garnet, con hardware real, el filtro bajó el error 1,59 veces y llevó el máximo de oscilación de 0,8 a 2,6 GeV (exacto 2,63). Las cuatro predicciones pre-registradas se cumplieron.
- El chip fue mejor que su modelo simulado, y el filtro ganó menos (1,59 veces contra 2,16).
- La ventaja de compilación de IQM (12 contra 18) era del nivel de optimización: con el mismo nivel, IBM también da 12.
- Se gastaron 17,50 de 30 créditos en las corridas de este capítulo, a unos 0,15 cada 1000 disparos con un piso de 0,50 por trabajo; con §170 (apéndice G) son unos 25,2 y quedan unos 4,8.
- `qang.iqm`, escrito después de las corridas, agrega la corrección de lectura y la elección de cadena. En el modelo de Garnet la corrección quita otro 15 % del error filtrado; en el chip real todavía no se probó.

Notas bibliográficas

El acceso fue por IQM Resonance (IQM Quantum Computers 2026); el procesador Garnet está descrito en Abdurakhimov et al. (2024). La compilación usa Qiskit (Javadi-Abhari et al. 2024), y los parámetros de oscilación son del tipo de Esteban et al. (2020). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

32 Arquitectura de software, ecosistema multi-SDK y ejecución física

Una lectura qg sólo sirve si llega bien desde el dispositivo hasta el número que se reporta. En el medio hay un SDK que ordena los bits a su manera, primitivas que devuelven valores esperados en vez de conteos, un compilador que elige qubits y un chip con errores que ningún filtro ve. Este capítulo recorre esa cadena tal como la resolvió la biblioteca. Las comprobaciones nuevas y el recálculo de las corridas de IBM guardadas están en `tools/make_cap32_figures.py`.

32.1. Desde la base: una cuenta, muchos caminos

La ecuación del capítulo 1 necesita una sola cosa: cuántos ceros salieron en cada qubit. Todo lo demás es plomería, y cada caño puede romper la lectura sin que se note:

- un SDK que escribe el qubit 0 a la derecha y otro que lo escribe a la izquierda **intercambian los qubits** sin dar error;
- una primitiva que devuelve $\langle Z_i \rangle$ ya da qg_Z, pero **no da los disparos** que el filtro necesita descartar;
- un compilador que elige qubits malos **baja la fracción conservada** antes de medir nada.

32.2. Un solo orden de qubits

Qiskit escribe el qubit 0 a la derecha de la cadena de bits; Cirq, PennyLane, Braket y pytket lo escriben primero. `qang.interop.canonical_counts` lleva todo a $\{(b_0, \ldots, b_{n-1}) : \text{cuenta}\}$, con el qubit 0 primero. El script lo comprueba con los dos SDK instalados acá:

- el mismo resultado (sólo el qubit 0 excitado) escrito `001` por Qiskit y `100` por PennyLane da **(1, 0, 0)** en los dos;
- un estado W de 3 qubits muestreado 20 000 veces en cada SDK da qg_Z entre 0,328 y 0,343 (ideal 1/3), todos los disparos en peso 1 y qg_S del registro 0,528 (ideal $\log_2 3/3 = 0{,}528$), igual en Qiskit y en PennyLane.

Cirq, Braket y pytket no están instalados en esta máquina. Su orden está fijado en los tests de la biblioteca (notas §130) y no se volvió a correr.

32.3. Primitivas V2 y observables filtrados

Las primitivas V2 de Qiskit vienen en dos formas, y qang lee las dos (notas §131):

- **Sampler.** `interop.sampler_qg` toma el resultado de un SamplerV2 y da el qg_Z de cada qubit, con su error, para todos los juegos de parámetros a la vez. Si se le pasa el peso, da también el perfil filtrado y la fracción conservada.
- **Estimator.** No devuelve disparos, así que no se puede descartar ninguno. Pero el qg_Z filtrado es un cociente de dos valores esperados, $\langle P_w Z_i\rangle / \langle P_w\rangle$, donde P_w proyecta sobre el peso w. Los dos operadores son diagonales, así que se escriben como sumas de cadenas Z. `interop.filtered_observables` arma esas sumas.

El script comprueba que es exacto: en 20 estados al azar de 4 qubits, los valores de `filtered_observables(4, 2)` dan la fracción conservada y el qg_Z filtrado con un error máximo de $3{,}3 \cdot 10^{-16}$. Tiene un costo: el observable más grande tiene 2^{n-1} cadenas Z (8 con 4 qubits, 2048 con 12). Todas conmutan y se miden en la misma base, así que el costo es de cuentas clásicas y no de circuitos. Aun así limita el método a registros de una docena de qubits.

32.4. Compilar pensando en el sector

`qang.ibm` agrega al compilador de Qiskit un análisis que decide, compuerta por compuerta, si el circuito conserva el peso (capítulo 30). También lee los errores de lectura publicados de los qubits físicos y transforma un resultado de IBM Runtime en cuatro lecturas: cruda, con corrección de lectura, filtrada y filtrada con corrección. En los diez circuitos de peso 1 de §137, recalculados del archivo guardado:

Tabla 32.1: Error medio de qg_Z, 8000 disparos (§137). Las tres predicciones se cumplieron.

dispositivo	crudo	lectura	filtro	filtro + lectura
FakeBrisbane	0,104	0,074	0,023	0,022
FakeSherbrooke	0,065	0,038	0,019	0,016
FakeTorino	0,101	0,036	0,018	0,013

Elegir los qubits con la calibración (§138). `predict_kept_fraction` multiplica la supervivencia del peso bajo cada canal calibrado, y `best_chain` elige la cadena con la mejor predicción:

- la predicción da números demasiado bajos: el error medio es de 0,08 a 0,13 (L1 falló);
- pero ordena bien las disposiciones (Spearman de 0,94 a 0,98, L2 se cumplió);
- y `best_chain` conserva entre 6 y 17 puntos más de disparos que la disposición por defecto de Qiskit (L3 se cumplió);
- después del resultado, sumar la parte de disparos que vuelve al sector como en un estado totalmente mezclado bajó el error a 0,023–0,041 (`kept_mixed_floor`).

Para la red neuronal con acoplamiento en anillo (§141), `best_layout` nunca quedó peor que la disposición por defecto. Mejoró 0,022 en FakeBrisbane, y con filtro y corrección acertó 550 de 567 entradas. R3 pedía 551 y falló por una, que está dentro de la variación entre corridas con la misma disposición.

32.5. El ZZ estático: se simula, no se mitiga

Los transmones acoplados acumulan todo el tiempo una fase ZZ. `ibm.add_static_zz` **la agrega** al circuito compilado, después de cada capa y en cada arista que se usa, con la duración calibrada de la capa. Sirve para medir cuánto ve el filtro de ese error. **No lo corrige.** En §150, con 0, 5 y 15 kHz:

- **El filtro ve parte del ZZ, no todo.** Entre compuertas lógicas el ZZ es diagonal y pasa el filtro. Dentro de la descomposición nativa de las XX+YY saca excitaciones del sector: la fracción conservada cayó entre 0,019 y 0,022 en los dos dispositivos con ECR, y 0,001 en FakeTorino.
- **El filtro quitó entre 32 y 60 % del error agregado.** El error filtrado creció entre 0,0025 y 0,0086 (de 14 a 38 %) a 15 kHz, y siguió entre 3,6 y 5,1 veces por debajo del crudo. Las notas decían “4 a 5 veces”; el recálculo da 3,6–5,1.

- **Los circuitos cortos sufren menos**: FakeTorino dura 2,1 µs contra 9 a 10 µs de los otros.

Las predicciones Z2 y Z3 fallaron, porque suponían que el filtro no vería nada del ZZ.

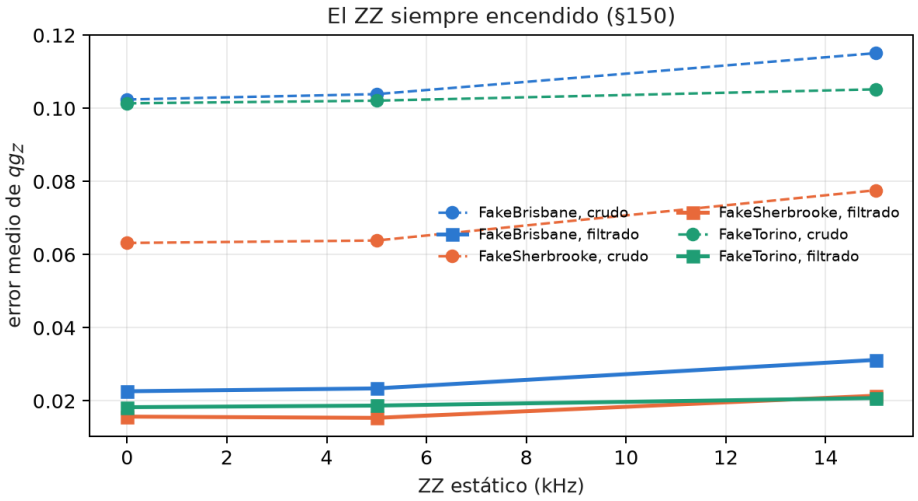


Figura 32.1: Error medio de qg_Z crudo (línea punteada) y filtrado (línea llena) en función del ZZ estático simulado, en tres dispositivos (§150).

32.6. ZNE con el filtro y planificación de disparos

En modo local, las opciones de mitigación de IBM Runtime no hacen nada. Por eso `ibm.zne_qg` pliega cada compuerta de dos qubits (escala 3), corre las dos escalas y extrapola en línea recta. El plegado conserva el peso, así que la extrapolación (ZNE) se combina con el filtro (§142):

- **El filtro hace más que la extrapolación**, entre 2 y 7 veces más: filtro + ZNE da 0,012, 0,011 y 0,015 contra 0,053, 0,034 y 0,085 de ZNE sola (Z2 se cumplió).
- **ZNE no ayuda siempre.** En FakeTorino, agregarla a filtro + lectura empeora el error de 0,013 a 0,014 (Z1 falló), y la mejor combinación ahí es filtro + lectura (Z3 falló).

`ibm.plan_shots` traduce una precisión pedida del qg_Z filtrado en disparos y segundos de QPU, a partir de la fracción conservada predicha (§143). Para un error de 0,02 planeó entre 3000 y 3400 disparos, y en 30 repeticiones el peor qubit

quedó en 0,021–0,023 (P1 se cumplió). La predicción por qubit fue entre 1,4 y 1,6 veces demasiado chica (P2 falló). Los que fallan son los qubits cerca de un polo, donde el ruido aleja al qg_Z de ±1. Por eso el plan usa el peor caso.

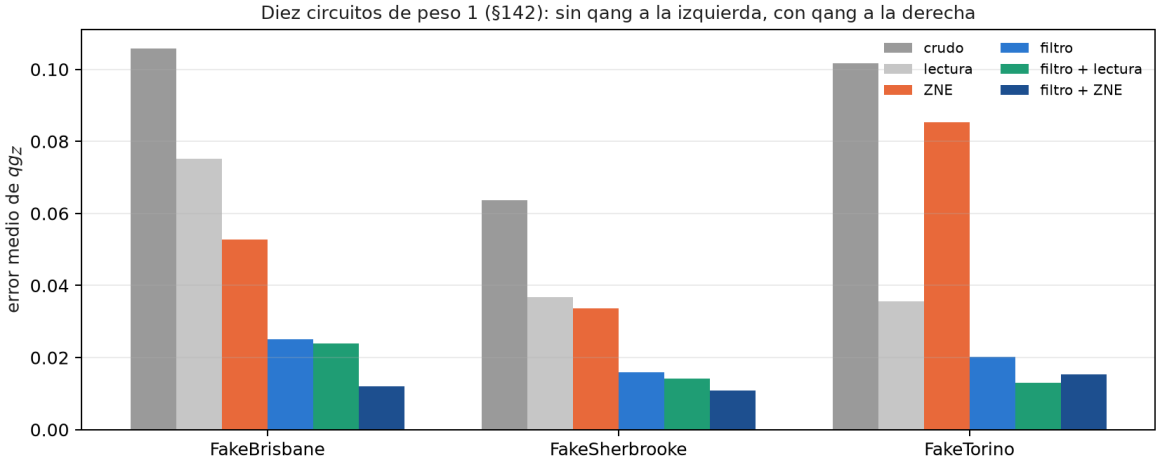


Figura 32.2: Diez circuitos de peso 1 en tres dispositivos (§142): crudo, corrección de lectura y ZNE sin qang; filtro, filtro + lectura y filtro + ZNE con qang.

32.7. Directrices por tipo de hardware

Superconductores (IBM, IQM).

- Compilar con compuertas que conservan el peso (XX+YY, RBS) y comprobarlo con el análisis antes de correr.
- Comparar el número de compuertas de dos qubits con el mismo nivel de optimización (capítulo 31).
- Elegir la cadena por la fracción conservada predicha, y corregir la lectura con la calibración, o con los dos polos donde la calibración no esté disponible (IQM).
- Preferir circuitos cortos: el ZZ y el desfase dentro de las compuertas se filtran en proporción al tiempo que los qubits pasan fuera del marco computacional.

Iones (IonQ, por la nube o por AWS Braket). La conectividad es de todos con todos y la compuerta nativa es Mølmer–Sørensen. El ensayo de H_2 en el simulador de IonQ con el modelo de ruido de Forte-1 (§128) dio:

- testigo +0,0003;
- 97,9 % de los disparos conservados;
- el error baja de 29,9 a 15,0 mHa con el filtro.

La corrida en el equipo real fue rechazada antes de aceptar ningún trabajo, porque el proyecto no tenía habilitado Forte-1, y no se cobró nada. Por Braket, `interop` resuelve el orden de los bits.

En cualquier plataforma.

- Ensayar gratis en el modelo simulado.
- Medir el costo con una prueba chica.
- Pre-registrar antes del trabajo principal.
- Leer el token de una variable de entorno y no gastar nada sin una bandera explícita.

32.8. Sin qang y con qang

Tabla 32.2: La cadena de software, con y sin la escala.

acción	sin qang	con qang	diferencia
leer conteos de otro SDK	cada SDK con su orden de bits	un orden único	se evita un intercambio silencioso de qubits
Estimator	$\langle Z_i \rangle$ sin filtrar	cociente de dos observables diagonales	el filtro sin disparos, exacto a 10^{-16}
diez circuitos de peso 1	0,065–0,104 crudo	0,013–0,022 con filtro y lectura	entre 4 y 8 veces menos error
elegir qubits	disposición por defecto	`best_chain`	entre 6 y 17 puntos más de disparos conservados
ZZ estático a 15 kHz	+0,004 a +0,015 en el crudo	+0,0025 a +0,0086 filtrado	se quita entre 32 y 60 % del agregado; no se mitiga
ZNE	0,034–0,085	0,011–0,015 con filtro	2 a 7 veces; ZNE empeora un poco en FakeTorino

acción	sin qang	con qang	diferencia
planificar disparos	—	3000–3400 para un error de 0,02	se cumple en el peor qubit; la predicción por qubit falla

Balance. La biblioteca resuelve la plomería que rompe las lecturas sin avisar: el orden de los bits, el filtro dentro de un Estimator y la elección de qubits. Las cifras de IBM son de modelos simulados en modo local, no de hardware. De las predicciones de este capítulo fallaron L1, Z1, Z3, P2, R3 y dos del ZZ, y todas quedan escritas. El ZZ estático es la advertencia más importante: la biblioteca lo agrega para medirlo, y el filtro sólo quita una parte.

32.9. En código

```
from qiskit.quantum_info import SparsePauliOp, random_statevector
from qang import interop as IO

obs = [SparsePauliOp.from_list(list(o.items())) for o in IO.filtered_observables(4, 2)]
sv = random_statevector(16, seed=0)
kept, qg = IO.estimator_filtered_qg([sv.expectation_value(o).real for o in obs])
# kept: fracción en peso 2; qg: los cuatro qg_Z filtrados, exactos
```

32.10. Resumen

- `qang.interop` lleva los conteos de cualquier SDK a un único orden de qubits; Qiskit y PennyLane dan el mismo estado W.
- El qg_Z filtrado sale de un Estimator como cociente de dos observables diagonales, exacto, con 2^{n-1} cadenas Z.
- En los modelos de IBM, filtro y lectura bajan el error de 0,065–0,104 a 0,013–0,022, y `best_chain` conserva entre 6 y 17 puntos más de disparos.
- `add_static_zz` simula el ZZ: el filtro quita entre 32 y 60 % de lo agregado y no lo mitiga del todo.
- El filtro rinde entre 2 y 7 veces más que ZNE sola; el plan de disparos se cumple usando el peor qubit.

Notas bibliográficas

Los kits son Qiskit (Javadi-Abhari et al. 2024), PennyLane (Bergholm et al. 2018), Cirq (Cirq Developers 2026) y Amazon Braket (Amazon Web Services 2020). Para el acoplamiento ZZ estático, véase Krantz et al. (2019); la extrapolación a ruido cero es Temme et al. (2017). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte XI

XI. Nanocuántica

33 Nanocuántica: transmisión, ruido de partición y qubits a escala nanométrica

En la escala nanométrica, muchas cantidades medibles son una probabilidad: la de que un electrón atraviese una barrera, la de que un nivel esté ocupado, la de que un espín esté arriba. Este capítulo las lee con la ecuación del capítulo 1. No hay sección de las notas ni módulo de qang para estos temas, así que cada cifra sale de una fórmula cerrada o de un Monte Carlo escrito en `tools/make_cap33_figures.py`. Al lado de cada lectura con qang va la forma usual, y se dice cuándo la escala aporta algo y cuándo sólo cambia la notación.

33.1. Desde la base: una probabilidad por experimento

La ecuación del capítulo 1 pide una probabilidad p_0 y da cuatro lecturas exactas:

$$\theta = 2\arccos\sqrt{p_0}, \qquad qg_Z = 2p_0 - 1, \qquad qg_S = H(p_0), \qquad m = 2000\,p_0 - 1000\ \text{m-qg}.$$

En este capítulo p_0 es, según el caso, la transmisión T de un canal, la ocupación de un nivel o la población de un estado de espín. Dos propiedades del capítulo 1 hacen todo el trabajo:

- **la lectura en m-qg es lineal en la probabilidad**: 1 m-qg es siempre $\Delta p_0 = 0{,}0005$;
- **el ángulo estabiliza el ruido binomial**: con N cuentas, $\sigma_\theta = 1/\sqrt{N}$ para cualquier p_0, mientras que $\sigma_{p_0} = \sqrt{p_0(1-p_0)/N}$ cambia con p_0. En la escala angular qga (Sección 1.4) son $159{,}15/\sqrt{N}$ qga, también para cualquier p_0.

33.2. La transmisión por túnel como probabilidad qang

Un electrón llega a una barrera rectangular y la atraviesa con probabilidad T. Con $p_0 = T$:

$$\theta_T = 2\arccos\sqrt{T}, \qquad \cos(\theta_T/2) = \sqrt{T} = |t|.$$

El medio ángulo qang es el módulo de la amplitud de transmisión t. No es una analogía: es la misma definición, y el script la comprueba a 10^{-16}. Con una barrera de 1 eV, un electrón de 0,5 eV ($\kappa = 3{,}62$ nm^{-1}) y la fórmula exacta de la barrera rectangular:

Tabla 33.1: Transmisión por una barrera rectangular de 1 eV para un electrón de 0,5 eV.

ancho	T	lectura	θ_T
0,2 nm	0,616	+231,9 m-qg	76,6°
0,5 nm	0,101	−797,3 m-qg	142,9°
1,0 nm	$2{,}85\cdot10^{-3}$	−994,3 m-qg	173,9°
1,5 nm	$7{,}62\cdot10^{-5}$	−999,85 m-qg	179,0°

- **Sin qang** se grafica $\ln T$, que cae con pendiente -2κ.
- **Con qang**, la distancia angular al polo, $\pi - \theta_T \approx 2|t|$, cae con pendiente $-\kappa$: el script mide $-3{,}620$ nm^{-1} contra $-3{,}623$. Es la amplitud en vez de la probabilidad, la misma información.
- **Las barreras gruesas viven pegadas al polo.** Un nanómetro deja la lectura a 5,7 m-qg del polo, y un nanómetro y medio, a 0,15 m-qg. Para leer esa diferencia con el error de una cuenta de electrones hace falta el ángulo exacto cerca del polo (capítulo 1), no la aproximación lineal.

33.3. La fórmula de Landauer: un canal, una lectura

La conductancia de un conductor balístico es $G = G_0 \sum_n T_n$, con $G_0 = 2e^2/h$. Escrita en qg:

$$\frac{G}{G_0} = \frac{N}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} q g_n.$$

El script usa el modelo de punto de silla de un contacto puntual cuántico, $T_n = 1/(1 + e^{-2\pi(V-n-1/2)/w})$, y comprueba la identidad a $9 \cdot 10^{-16}$:

- **Cada meseta es un conjunto de canales en los polos**: abiertos en +1000 m-qg, cerrados en −1000. En $V = 1, 2, 3$ la conductancia vale exactamente 1, 2 y 3.
- **Cada escalón es un canal que cruza el ecuador.** El punto medio del escalón es la lectura 0 m-qg de ese canal.
- **La conductancia sola no separa canales que se abren a la vez**: da $\sum T_n$ y nada más. El ruido de disparo (sección siguiente) da $\sum T_n(1-T_n)$. Con las dos, dos canales parcialmente abiertos se recuperan exactamente: el script parte de $T = 0{,}4031$ y $0{,}9716$ y los recupera iguales. Es la técnica conocida para medir las transmisiones de un contacto atómico. En qg, la conductancia lee el qg medio de los canales y el ruido lee el qg^2 medio.

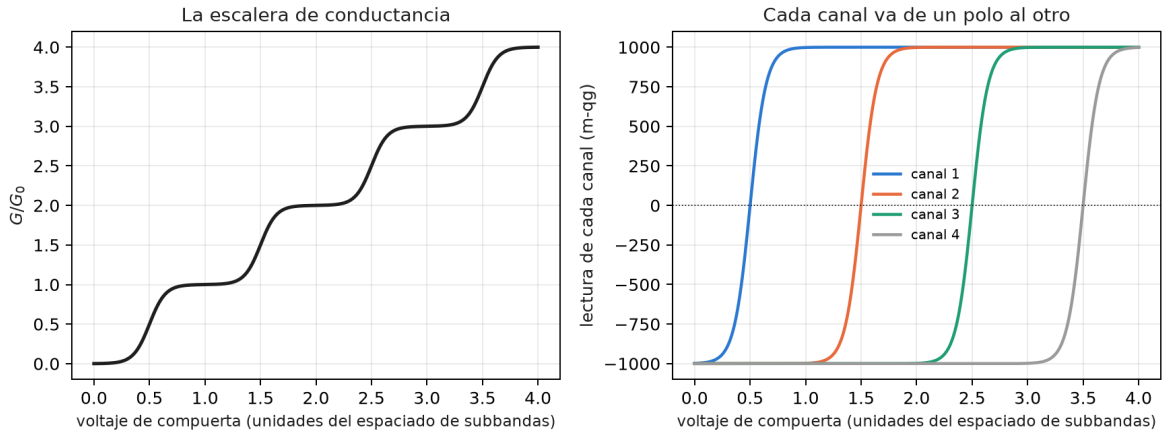


Figura 33.1: Izquierda: la escalera de conductancia de un contacto puntual cuántico con cuatro canales. Derecha: la lectura de cada canal en m-qg; cada escalón es un canal que va de −1000 a +1000 m-qg y cruza el ecuador en el medio.

33.4. Ruido de partición: la varianza binomial, estabilizada

Cada electrón que llega al canal pasa o rebota: es un ensayo de Bernoulli con probabilidad T. De ahí sale el ruido de partición, $S = 2eI(1 - T)$, con factor de Fano $F = 1 - T$. En qg, $T(1 - T) = (1 - qg^2)/4 = \sin^2\theta/4$: es la varianza

binomial del capítulo 1. El script cuenta 1000 electrones por ventana, en 20 000 ventanas:

- **El factor de Fano** medido como varianza sobre media de los electrones transmitidos coincide con $1 - T$ a 0,02 o menos.
- **Sin qang**, el desvío de $\hat{T}$ por $\sqrt{N}$ va de 0,14 a 0,50: depende de lo que se mide, y cerca de los polos la barra de error se achica tanto que engaña.
- **Con qang**, el desvío del ángulo $\hat{\theta}$ por $\sqrt{N}$ queda entre 0,985 y 1,009 para T entre 0,05 y 0,95, y sigue en 1,01–1,02 en 0,02 y 0,98. La barra de error es la misma en todo el rango.

Es la transformación arcoseno, conocida en estadística desde hace mucho. qang no la inventa. Lo que aporta es que el ángulo estabilizado es la coordenada natural del estado.

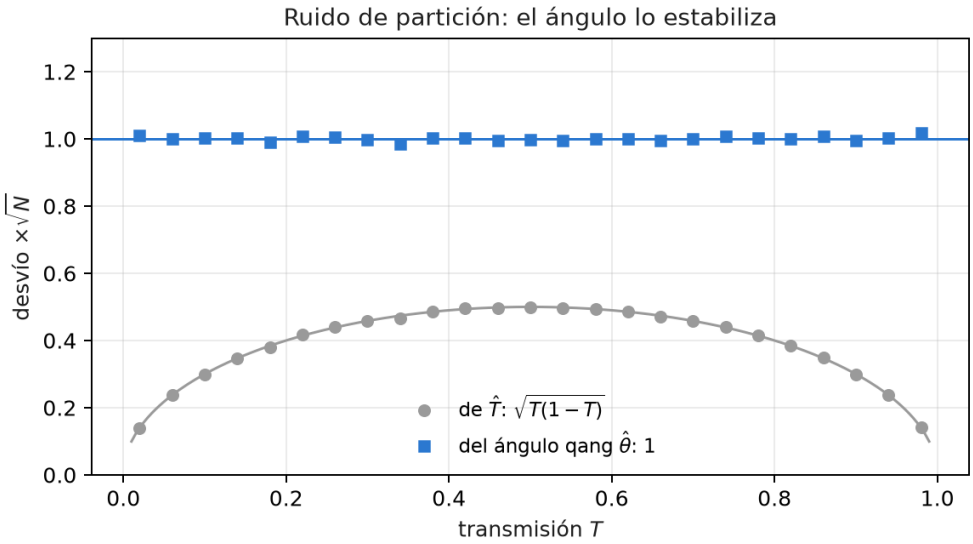


Figura 33.2: Desvío de la transmisión estimada y del ángulo qang estimado, multiplicados por $\sqrt{N}$, con 1000 electrones por ventana: el primero sigue $\sqrt{T(1-T)}$; el segundo queda en 1.

33.5. Bloqueo de Coulomb: la ocupación de un nivel

En un punto cuántico con bloqueo de Coulomb, un nivel a energía ε del potencial químico de los contactos está ocupado con la probabilidad de Fermi $f = 1/(1 + e^{x})$, con $x = \varepsilon/k_B T$. Con $p_0 = f$:

$$qg_Z = 2f - 1 = -\tanh(x/2).$$

Es el mismo estado térmico que $qg_Z = \tanh(\beta h)$ del capítulo 8, con el signo de la convención. El script lo comprueba a $2 \cdot 10^{-16}$. La pendiente en el centro, $-1/(2k_BT)$, es un termómetro: un sensor de carga lee la ocupación y su ancho da la temperatura del electrón. Con 25 puntos de ε, 200 lecturas por punto y 400 repeticiones ($k_BT = 1$):

Tabla 33.2: Termometría con la ocupación de un nivel.

método	k_BT estimado
ajuste de Fermi por máxima verosimilitud (sin qang)	0,9986 ± 0,0294
recta por artanh(qg_Z) (con qang)	1,0294 ± 0,0305

qang pierde acá. La recta es cerrada y no necesita un ajuste no lineal, pero tiene un sesgo de +2,9 %. En las colas, artanh amplifica el ruido de las lecturas cerca de ±1 (se ve en la figura), y los puntos con todas las lecturas iguales hay que descartarlos. El ajuste de Fermi usa la misma información sin sesgo. La lectura qg sirve para ver el termómetro, no para estimar con él.

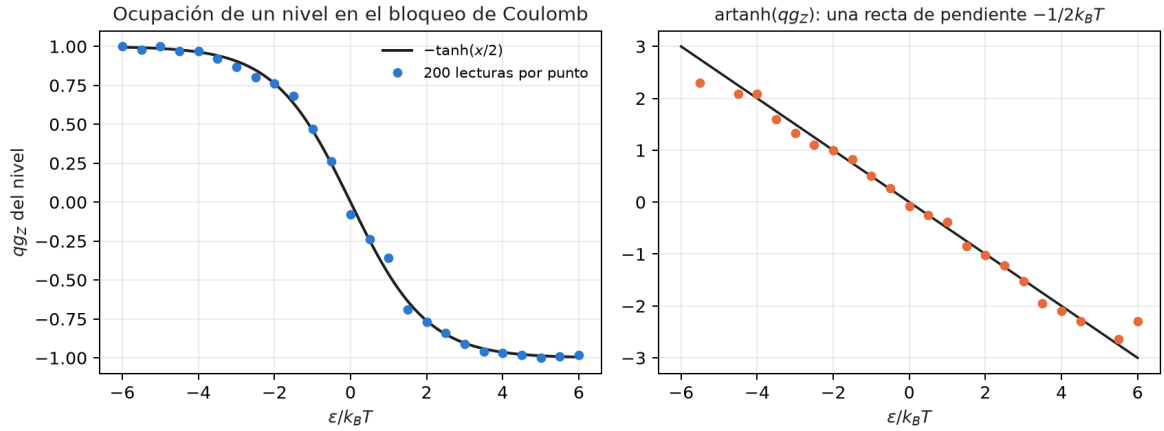


Figura 33.3: Izquierda: qg_Z de un nivel contra ε/k_BT, exacto y con 200 lecturas por punto. Derecha: artanh(qg_Z) es una recta de pendiente $-1/2k_BT$, pero en las colas el ruido la tuerce.

33.6. Qubits de carga y de espín en puntos cuánticos

Un qubit de espín en un punto cuántico se lee con un sensor de carga: el espín se convierte en carga y el sensor decide 0 o 1, con errores $e_0 = P(1\,|\,0)$ y $e_1 = P(0\,|\,1)$. Es la misma lectura que la de un transmón, y la regla del capítulo 27 (§31) la describe en m-qg:

$$m_{\text{leída}} = (1 - e_0 - e_1)\, m + 1000\,(e_1 - e_0).$$

El script simula una oscilación de Rabi con $e_0 = 0{,}02$ y $e_1 = 0{,}08$ (valores ilustrativos) y 2000 lecturas por punto:

- la identidad afín vale a $2 \cdot 10^{-13}$;
- **sin corregir**, la oscilación tiene una amplitud de 898 m-qg en vez de 1000 y está corrida +60 m-qg. Su error cuadrático medio es de 95,5 m-qg;
- **corregida con los dos polos** (2000 lecturas en cada uno), el error baja a 19,4 m-qg. El precio es que el ruido crece $1/(1 - e_0 - e_1) = 1{,}11$ veces;
- la fidelidad de lectura usual, $1-(e_0+e_1)/2 = 0{,}95$, es en m-qg una visibilidad de 900 m-qg y un corrimiento de 60.

La corrección es la estándar. Escribirla en m-qg la vuelve una cuenta lineal: cada punto de error de lectura cuesta 10 m-qg de visibilidad.

33.7. Centros NV: el contraste como presupuesto de m-qg

Un centro NV en diamante se lee por fluorescencia: el estado $m_s = 0$ brilla más que $m_s = \pm 1$, con un contraste C. Si p_0 es la población de $m_s = 0$ y N_b los fotones que daría el estado brillante, la cuenta es poissoniana con media $N_b\,[1 - C(1 - p_0)]$, y la lectura de p_0 en m-qg tiene

$$\sigma_m \approx \frac{2000}{C\sqrt{N_b}} \text{ m-qg}.$$

- Con $C = 0{,}3$ y 444 444 fotones, la fórmula da 10,00 m-qg. El Monte Carlo da 9,22, igual que la fórmula sin aproximar (el factor $\sqrt{1 - C/2}$ en $p_0 = 1/2$).
- **Resolver 10 m-qg cuesta unos 444 000 fotones.** Un contraste de 0,3 hace que cada m-qg cueste once veces más fotones que si el contraste fuera 1. Es el mismo presupuesto del capítulo 1 con un factor $1/C^2$.

- **Magnetometría por ODMR.** Una línea de 1 MHz de ancho, contraste 0,2, 61 frecuencias y 1,16 millones de fotones en total. El ajuste de la línea da el centro con un desvío de 8,3 kHz, igual a la cota de Cramér–Rao (8,3 kHz). Son 296 nT con $\gamma = 28$ GHz/T.

El ajuste de la línea no cambia con qang. Lo que la escala agrega es la cuenta previa: cuántos fotones pide una resolución dada, en una unidad lineal en la población del espín.

33.8. Sin qang y con qang

Tabla 33.3: La nanocuántica, con y sin la escala.

tema	sin qang	con qang	diferencia
túnel	$\ln T$, pendiente -2κ	$\cos(\theta_T/2) = \lvert t\rvert$; $\pi - \theta_T$ con pendiente $-\kappa$	la amplitud a la vista; la misma información
Landauer	$G/G_0 = \sum T_n$	$N/2 + \sum q g_n/2$; mesetas en los polos	conductancia = qg medio, ruido = qg^2 medio
ruido de partición	barra de $\widehat{T}$: 0,14 a 0,50 ($\times 1/\sqrt{N}$)	barra de $\widehat{\theta}$: 0,985 a 1,009	constante en todo el rango (transformación arcoseno)
termometría	ajuste de Fermi: 0,9986 ± 0,029	recta en artanh: 1,029 ± 0,031	**qang peor**: +2,9 % de sesgo
lectura de un espín	95,5 m-qg de error sin corregir	19,4 corregida con los polos	la corrección estándar, escrita lineal
NV	contraste y fotones	444 000 fotones para 10 m-qg con $C = 0{,}3$	un presupuesto en unidades de población
ODMR	8,3 kHz por ajuste	lo mismo	ninguna

Balance. En la nanocuántica la escala acierta en el lenguaje: transmisiones, ocupaciones y poblaciones son probabilidades, y qang las lee todas igual. Aporta poco más:

- la barra de error constante del ángulo, que es la transformación arcoseno;

- el medio ángulo como amplitud de transmisión;
- presupuestos lineales en m-qg.

En el único caso en que compite como estimador, la termometría, pierde contra el ajuste de máxima verosimilitud. Todo es cálculo y simulación: ninguna cifra de este capítulo viene de un experimento. Tampoco hay todavía un módulo de qang para estos temas.

33.9. En código

```
import numpy as np
from qang import probability as PB

T = 2.85e-3                              # barrera de 1 nm (tabla de arriba)
PB.milliqang_from_p0(T)                          # -994,3 m-qg
np.cos(PB.theta_from_milliqang(PB.milliqang_from_p0(T)) / 2)  # 0,0534 = sqrt(T) = |t|
```

33.10. Resumen

- La transmisión por túnel es una probabilidad qang, y su medio ángulo es el módulo de la amplitud: $\cos(\theta_T/2) = |t|$.
- En la fórmula de Landauer cada canal es una lectura qg: las mesetas son canales en los polos y los escalones, canales que cruzan el ecuador. Con la conductancia y el ruido se recuperan dos canales abiertos a la vez.
- El ruido de partición es la varianza binomial; el ángulo qang la estabiliza en $1/\sqrt{N}$ en todo el rango.
- La ocupación de un nivel es $qg_Z = -\tanh(x/2)$; como termómetro, la recta en artanh tiene un sesgo de +2,9 % que el ajuste de Fermi no tiene.
- La lectura de espines por sensor de carga y la de centros NV por fluorescencia se escriben como presupuestos lineales en m-qg; sus estimadores no cambian.

Notas bibliográficas

La conductancia como transmisión es Landauer (1957) y Büttiker (1986); para transporte mesoscópico en general, véase Datta (1995). El ruido de disparo es

Blanter y Büttiker (2000), y el factor de Fano, Fano (1947). El bloqueo de Coulomb es Beenakker (1991); los espines en puntos cuánticos, Hanson et al. (2007), y su lectura en un disparo, Elzerman et al. (2004). El centro NV es Doherty et al. (2013), y la sensibilidad de ODMR, Dréau et al. (2011). Las notas de investigación numeradas (§) que cita el capítulo y los scripts que lo verifican están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte XII

XII. Aplicaciones transversales

34 Arquitectura angular: química, materia condensada, óptica relativista, termodinámica y geometría

Este capítulo responde a una propuesta: trece fenómenos de cinco áreas, cada uno con una ecuación, un "mapeo con qg" y un test analítico con su criterio de aprobación. La propuesta usa una moneda que la base del capítulo 1 no tiene: habla de "ciclos qg" y "períodos qg". Antes de correr nada hay que traducir esos criterios a lecturas. Después, cada test se corre en `tools/make_cap34_figures.py`, que tarda unos 25 segundos. No hay sección de las notas ni módulo de qang para estos temas, así que cada cifra sale de una fórmula cerrada, de una diagonalización exacta o de un Monte Carlo escrito ahí. Ninguna viene de un experimento. El veredicto de cada test está en la Tabla 34.3: algunos se cumplen tal como están escritos, otros se cumplen sólo después de corregirlos y dos fallan.

34.1. Desde la base: lecturas, no ciclos

La ecuación del capítulo 1 parte de una probabilidad p_0 y da cuatro lecturas exactas:

$$\theta = 2\arccos\sqrt{p_0}, \qquad qg_Z = 2p_0 - 1 = \cos\theta, \qquad qg_S = H(p_0), \qquad m = 1000\, qg_Z \text{ m-qg}.$$

Hay tres consecuencias para la propuesta:

- **qg no tiene período.** qg_Z vive en $[-1, 1]$ y el ángulo qang, en $[0, \pi]$. Un criterio como "fase $= \pi \equiv 0{,}5$ ciclo qg" no se puede comprobar tal cual. Hay que reescribirlo como una lectura: por ejemplo, $qg_X = -1$, que son -1000 m-qg. La escala angular qga del capítulo 1 (Sección 1.4) sí es periódica, 1000 qga por vuelta, y en ella esa fase se escribe $\varphi = 500$ qga; pero sigue siendo un ángulo, no una lectura: para comprobarla hay que medirla

con un interferómetro, y lo que se compara con la predicción es la lectura que este entrega.

- **Una fase no cambia qg_Z.** Una rotación alrededor de Z (precesión de Larmor, fase de Aharonov–Bohm, signo de un intercambio) deja intactas las poblaciones. Se lee con un interferómetro, en qg_X o qg_Y, como la fase de Berry del capítulo 7.
- **Donde hay una probabilidad, hay una lectura.** Una reflectancia, el peso de un determinante, la ocupación del vacío o una probabilidad de transición son un p_0, y entonces vale todo lo del capítulo 1: la escala lineal y el ángulo que estabiliza el ruido.

34.2. Química cuántica

34.2.1. Jordan–Wigner: el signo del intercambio es una lectura

El mapeo es $a_j^\dagger = \left(\prod_{k<j}(-Z_k)\right)\sigma_j^+$. El script construye los operadores de cuatro modos y comprueba las relaciones de anticonmutación $\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}$ y $\{a_i, a_j\} = 0$ con error exactamente nulo. También comprueba que $a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle + a_2^\dagger a_1^\dagger|0\rangle = 0$. La propuesta pide que el intercambio sea "un desfase de medio período qg". En el capítulo 1 eso no es una lectura. Para que lo sea, el intercambio tiene que actuar en un test de Hadamard: un qubit auxiliar controla el intercambio de los dos modos ocupados y se lee en X.

- **Con el intercambio fermiónico**, el auxiliar lee $qg_X = -1$, o sea -1000 m-qg.
- **Con un SWAP de qubits**, el mismo circuito lee $+1000$ m-qg.

El signo de Pauli es la diferencia entre los dos polos de qg_X. Las compuertas Z de la cadena de paridad son exactas, así que no hay "pérdida de fase por acumulación". El error de un circuito real viene del ruido, no del mapeo.

34.2.2. UCC para H_2: la amplitud es medio ángulo qang

Para H_2 en STO-3G a 0,735 Å, con el hamiltoniano de cuatro qubits del capítulo 25, el UCCSD se reduce a una sola doble excitación. El estado es $|\Psi(t)\rangle = \cos t\,|\mathrm{HF}\rangle + \sin t\,|\mathrm{doble}\rangle$ y la energía tiene la forma cerrada $E(t) = A + B\cos 2t + C\sin 2t$:

- el mínimo está en $t^* = -0{,}1118$ rad y vale $-1{,}1373060$ Ha, la energía FCI con un error de $5 \cdot 10^{-14}$ Ha; Hartree–Fock da $-1{,}1169990$;

- **el peso de Hartree–Fock es una lectura**: $p_0 = \cos^2 t^* = 0{,}9876$, o sea $+975{,}1$ m-qg, y su ángulo qang es $\theta = 2|t^*| = 0{,}2235$ rad. La amplitud UCC es medio ángulo qang, la misma relación que el capítulo 33 encuentra en el túnel;
- un barrido con paso $\pi/200$ llega a $5{,}4 \cdot 10^{-6}$ Ha del mínimo.

La propuesta pide "precisión sub-milihartree, $< 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ Ha". Ese umbral es la exactitud química (1 kcal/mol), no un sub-milihartree, y en un simulador exacto se supera por once órdenes de magnitud: no discrimina nada. La curva de disociación no se rehace porque el entorno no tiene PySCF; las corridas guardadas del capítulo 25 la cubren. El gradiente es nulo en el mínimo tanto en t como en m, porque $dm/dt = -2000 \sin 2t \neq 0$ ahí. En Hartree–Fock ($t = 0$, el polo) la coordenada m es singular, como se ve en el capítulo 23.

34.2.3. Larmor y el eco de Hahn

La precesión libre $\Delta\varphi = \gamma B_0 t$ es una rotación alrededor de Z. Con el protón ($\gamma/2\pi = 42{,}577$ MHz/T) y un espín en el ecuador, el script da $qg_Z = 0$ en todo momento y $qg_X = \cos \Delta\varphi$. La precesión no aparece en la lectura de Z.

Para el eco, el script toma 20 000 espines con desintonía gaussiana ($\sigma = 2\pi \cdot 50$ kHz), $\tau = 20$ µs, la secuencia $\pi/2 - \tau - \pi - \tau$, y lee la magnetización en qg_X:

Tabla 34.1: El eco de Hahn leído en qg_X.

caso	qg_X	teoría
sin pulso π (decaimiento libre)	0,004 (ruido del Monte Carlo)	$2{,}7 \cdot 10^{-9}$
eco, desintonía estática	**1,000000** (+1000 m-qg)	1
eco, pulso π con 2 % de más	0,99901	0,99901
eco, desintonía que cambia un 10 % de σ entre mitades	0,820	0,821

El criterio de la propuesta, "$F = 1$ independiente de $\Delta\omega$", vale sólo con desintonía estática y pulsos exactos. Un pulso con 2 % de error cuesta 1 m-qg, y una desintonía que deriva cuesta 180 m-qg. La calibración del eco con el propio dispositivo es el tema del capítulo 22.

34.3. Materia condensada

34.3.1. Ising con campo transverso: el pico se corre con el tamaño

$H = -J\sum Z_i Z_{i+1} - g\sum X_i$ en una cadena abierta. Con $\tan\theta = g/J$, la transición está en $g = J$, es decir en $\theta = \pi/4$, **en el límite termodinámico**. La propuesta pide encontrarla con 2 a 4 espines, en el pico de la derivada de la entropía de entrelazamiento. El script diagonaliza con $N = 2$ a 12 (en el sector par de la paridad $\prod X$, para que el estado de gato por debajo de la transición quede bien definido):

Tabla 34.2: Posición del pico (g/J) y lectura transversal en el punto crítico.

N	caída más rápida de S	pico de $d\,qg_X/dg$	m_X en $g = J$
2	0,33	(en el borde)	894,4
4	0,65	0,43	810,1
6	0,78	0,63	771,1
8	0,85	0,70	747,9
10	0,88	0,78	732,3
12	0,90	0,83	720,9
∞	1	1	636,6 ($2000/\pi$)

El test falla con 2 a 4 espines. El pico está en $g/J = 0{,}33$ y $0{,}65$, es decir en $\theta = 18°$ y $33°$, no en $45°$. Con dos espines no hay transición: la curva es suave. El pico se acerca a 1 a medida que crece N, y la entropía converge antes que la lectura qg_X (Figura 34.1). La lectura transversal en $g = J$, m_X, también baja hacia el valor exacto $1000 \cdot 2/\pi = 636{,}6$ m-qg (Pfeuty 1970), pero con 12 espines todavía está 84 m-qg arriba. Lo que da $\theta = \pi/4$ es el límite, no la escala.

34.3.2. Cadena de Kitaev: la protección está en el hamiltoniano, no en el ángulo

La paridad $P = \prod_j (-i\gamma_{2j-1}\gamma_{2j})$ toma los valores ± 1, es decir ± 1000 m-qg. El script separa dos preguntas:

- **¿Protege la cadena?** Con $t = \Delta = 1$ y $\mu = 0{,}5$, la diferencia de energía entre los dos sectores de paridad cae a la mitad por cada sitio: 0,207 con 2 sitios y 0,0029 con 8. Con $\mu = 0$ y desorden local $\pm 0{,}3$ cae de $1{,}5 \cdot 10^{-2}$

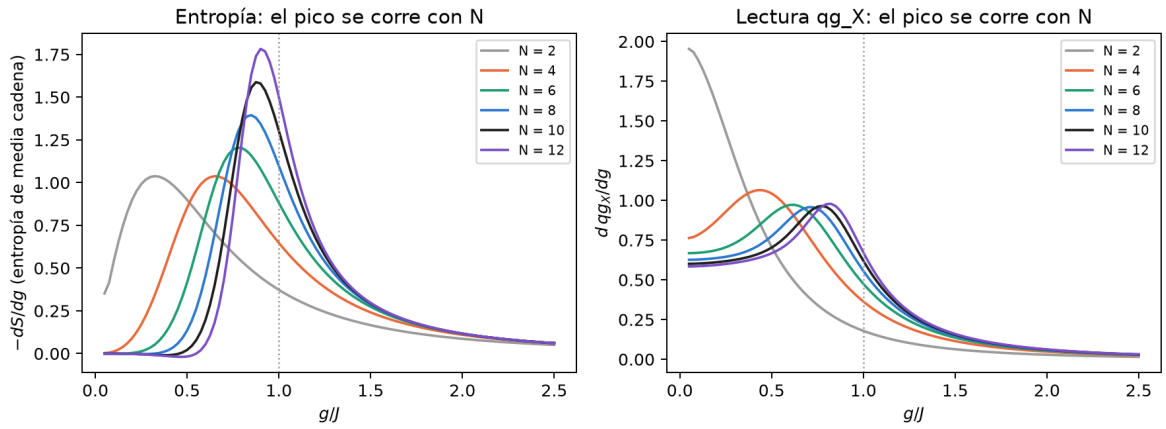


Figura 34.1: Izquierda: $-dS/dg$ de la entropía de media cadena para $N = 2$ a 12. Derecha: la susceptibilidad de la lectura transversal, $d\,qg_X/dg$. Los dos picos se acercan a $g/J = 1$ a medida que crece la cadena; con 2 a 4 espines están lejos.

a $3 \cdot 10^{-7}$, aunque no de forma monótona. Esa es la protección topológica: exponencial en la longitud.

- **¿Protege la compuerta?** El trenzado $B = e^{\pi\gamma_2\gamma_3/4} = (1 + \gamma_2\gamma_3)/\sqrt{2}$ se cumple a 10^{-16}, con fases propias exactas $\pm\pi/4$ y $B^2 = \gamma_2\gamma_3$. Pero si se aplica como compuerta con un error relativo de ángulo ϵ, la infidelidad es $6{,}2 \cdot 10^{-5}$ con 1 %, $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ con 5 % y $6{,}2 \cdot 10^{-3}$ con 10 %, cuadrática en ϵ, como cualquier rotación.

Escribir el trenzado en "cuartos de ciclo qg" no lo protege. La invariancia frente a perturbaciones locales viene del hamiltoniano con modos de Majorana separados (Kitaev 2001; Ivanov 2001). Una compuerta que imita el trenzado tiene el error de cualquier compuerta.

34.3.3. Aharonov–Bohm: una franja por cuanto de flujo

En un anillo de dos caminos, la salida tiene $p_0 = \cos^2(\pi\Phi/\Phi_0)$, así que

$$qg_Z = \cos\left(2\pi\,\frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \qquad \theta = 2\pi\,\frac{\Phi}{\Phi_0} \ \ (\text{plegado en } [0,\pi]).$$

El ángulo qang es la fase de Aharonov–Bohm. La lectura vuelve a su valor cada $\Phi_0 = h/e$ (el script lo comprueba a 10^{-15}). Lo periódico es el flujo, no qg. Con

2000 electrones por medición y 4000 repeticiones, el flujo estimado a partir del ángulo tiene un desvío por $\sqrt{N}$ de entre 0,156 y 0,163 para Φ/Φ_0 de 0,05 a 0,45. La cota es $1/2\pi = 0{,}159$, igual en todo el rango (Figura 34.2). Es la transformación arcoseno del capítulo 1 aplicada a un interferómetro. **Lo que la lectura no da** es el signo: Φ y $-\Phi$ (y $\Phi_0 - \Phi$) leen lo mismo. Para separarlos hace falta la segunda cuadratura, qg_Y, como en el capítulo 7.

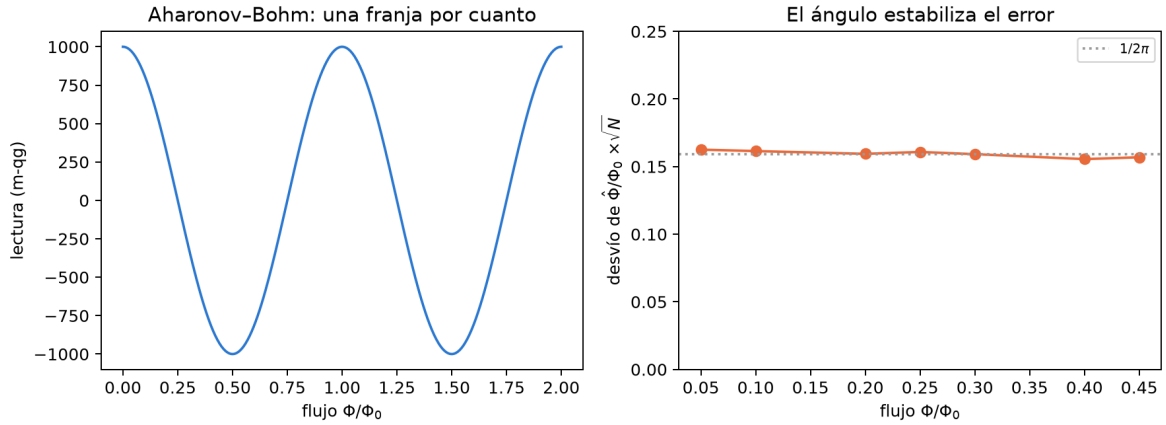


Figura 34.2: Izquierda: la lectura del anillo en m-qg contra el flujo; una franja por cuanto. Derecha: desvío del flujo estimado a partir del ángulo qang, por $\sqrt{N}$, con 2000 electrones por medición: queda en $1/2\pi$ en todo el rango.

34.4. Relatividad y óptica

34.4.1. Rotación de Wigner

Dos impulsos no colineales, $v_1 = 0{,}6c\,\hat{x}$ y $v_2 = 0{,}8c\,\hat{y}$, componen un impulso seguido de una rotación. El script los multiplica como matrices 4×4, separa el impulso resultante y lee el ángulo: $\Omega_W = 0{,}3303$ rad ($18{,}92°$). La fórmula de la propuesta da lo mismo a $1{,}5 \cdot 10^{-15}$. Con espinores, el mismo producto en $SL(2,\mathbb{C})$ se descompone en una parte hermítica (el impulso) y una unitaria (la rotación), y da el mismo ángulo a $2 \cdot 10^{-16}$. Las comprobaciones de la propuesta pasan: $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ a $9 \cdot 10^{-16}$, la rotación es ortogonal y la parte del espinor es unitaria. Un espín que apuntaba en x lee después $qg_X = \cos\Omega_W$, o sea $+945{,}9$ m-qg. Con impulsos colineales, $\Omega_W = 0$. Todo esto es estructura del grupo de Lorentz: la escala sólo traduce el ángulo a una lectura de espín. Con espinores de Dirac el resultado es el mismo, porque un espinor de Dirac son dos espinores de $SL(2,\mathbb{C})$.

En la escala angular qga del capítulo 1, $\Omega_W = 52{,}6$ qga. La propuesta de energía y antimateria de ese capítulo (Sección 1.4.1) usa otro ángulo del mismo grupo, el θ_r con $\cos\theta_r = 1/\gamma$; aquí no se usa, y allí sigue sin verificar.

34.4.2. Fresnel: Brewster es un cero de probabilidad, la reflexión total es una fase

Del aire a un vidrio de $n = 1{,}5$:

- **Brewster**, en $56{,}31°$: $r_p = 0$ exacto. La luz s refleja $R_s = 0{,}148$, que como lectura de "reflejado" son -704 m-qg. En incidencia normal, $R = 0{,}04$, o sea -920 m-qg.
- **Reflexión total**, desde el vidrio y por encima de $41{,}81°$: $|r_s| = |r_p| = 1$ a $4 \cdot 10^{-16}$. La reflectancia lee $+1000$ m-qg siempre y no informa nada. Toda la información está en las fases. Su diferencia $\delta_p - \delta_s$ llega a un máximo de $45{,}24°$ en $51{,}67°$ y pasa por $45°$ en $50{,}23°$ y $53{,}26°$: el rombo de Fresnel. Si incide luz lineal a $45°$ con un ángulo de $45°$, sale con $qg_Y = S_3/S_0 = \sin(\delta_p - \delta_s) = 0{,}600$, o sea $+600$ m-qg, una lectura de Stokes como las del capítulo 6.
- **Goos–Hänchen** no es un "corrimiento de fase". Es un desplazamiento lateral que sale de la derivada de la fase: con la fórmula de Artmann, $D = -(\lambda/2\pi n)\, d\delta/d\theta_i$, es de 0,64 λ para s a $45°$ (Goos y Hänchen 1947; Artmann 1948).

La fase de reflexión total como "compuerta de fase de un qubit" funciona: actúa sobre la polarización y se lee en qg_Y.

34.4.3. Bogoliubov y Unruh: el medio ángulo es la gudermanniana

El vacío de Minkowski visto por un observador acelerado es un estado comprimido de dos modos. Cada modo reducido es térmico, con $\bar{n} = \sinh^2 r$ y factor de Boltzmann $\tanh^2 r = e^{-2\pi\omega c/a}$ (Unruh 1976; Crispino et al. 2008). El script comprueba la entropía cerrada, $S = \cosh^2 r \ln\cosh^2 r - \sinh^2 r \ln\sinh^2 r$, contra la suma sobre los números de ocupación: coinciden a 10^{-16} hasta $r = 1$, y a $2 \cdot 10^{-6}$ en $r = 1{,}5$ por el corte en 80 niveles. La matriz hiperbólica conserva la forma $\mathrm{diag}(1, -1)$ a $2 \cdot 10^{-16}$. La propuesta la llama "rotación pseudounitaria parametrizada en qg". Una transformación de $SU(1,1)$ no es una rotación, pero el peso del vacío sí es una probabilidad, $p_0 = 1/\cosh^2 r$, y da una identidad exacta:

$$\frac{\theta}{2} = \mathrm{gd}(r) = \arctan(\sinh r).$$

El medio ángulo qang del peso del vacío es la función gudermanniana del parámetro de compresión. Pasa la recta hiperbólica a un ángulo de círculo, y el script la comprueba a 10^{-16}. Las lecturas del vacío son $+880{,}0$, $+572{,}9$, $-160{,}1$ y $-638{,}6$ m-qg para $r = 0{,}25$, $0{,}5$, 1 y $1{,}5$. Con $r \to \infty$ (aceleración enorme o frecuencia nula), $\theta \to \pi$.

34.5. Termodinámica y metrología

34.5.1. Jarzynski con dos mediciones

Un qubit con $H = -\frac{h}{2}(\cos\varphi\, Z + \sin\varphi\, X)$ se lleva de $h = 1$, $\varphi = 0$ a $h = 2$, $\varphi = 1$ rad en un tiempo $1{,}5$ (400 pasos), con $\beta = 1$. El trabajo se mide con dos mediciones proyectivas (Talkner et al. 2007). Las probabilidades de transición $|\langle n_f|U|m_i\rangle|^2$ son lecturas: las dos de "quedarse" valen $qg = 0{,}707$, o sea $707{,}4$ m-qg.

- **Exacto**: $\langle e^{-\beta W}\rangle = 1{,}3684330 = Z_f/Z_i$, con error $3{,}8\cdot10^{-15}$. $\Delta F = -0{,}3137$ y $\langle W\rangle = -0{,}0958 \geq \Delta F$.
- **Con trayectorias muestreadas** (2000 repeticiones), el estimador $-\ln\overline{e^{-\beta W}}/\beta$ tiene un sesgo de $+0{,}021$ con 10 trayectorias, $+0{,}0016$ con 100 y $+1{,}5\cdot10^{-4}$ con 1000. Con 10 000 trayectorias, el sesgo queda dentro del ruido.

La igualdad se cumple (Jarzynski 1997), y la escala no cambia nada de la termodinámica. Lo que agrega es que cada probabilidad de transición es una lectura con la barra de error del capítulo 1.

34.5.2. Información de Fisher de un estado GHZ

Para $N = 1$ a 8 qubits y la fase generada por $\sum Z/2$, el script da una información de Fisher cuántica de N^2 para el estado GHZ y de N para el estado producto, con error de 10^{-15}. El paso que conecta con el capítulo 1 es la lectura de paridad. Su valor medio es $qg = \cos N\varphi$, y la información de Fisher de un disparo de una lectura ±1 es $(dqg/d\varphi)^2/(1-qg^2)$. Eso da exactamente N^2 en cualquier φ: **la lectura de paridad alcanza la cota cuántica** (Bollinger et al. 1996; Giovannetti

et al. 2006). La propuesta pide usar "qg como parámetro continuo diferenciable". Si el parámetro fuera la lectura misma, la información se dividiría por $(dqg/d\varphi)^2$ y divergiría en los polos. La escala lee, y el parámetro sigue siendo la fase. El costo del ruido de lectura, $(1-2e)^N$, está en el capítulo 8.

34.6. Geometría y caos

34.6.1. Fubini–Study: polo a polo, la mitad del ángulo qang

El script suma en 20 000 pasos las distancias $\arccos|\langle\psi_k|\psi_{k+1}\rangle|$ a lo largo de un meridiano y obtiene $1{,}5707963 = \pi/2$. Con $\sqrt{1-|\langle\cdot|\cdot\rangle|^2}$ da lo mismo, y también con la coordenada qg, $ds = dqg/(2\sqrt{1-qg^2})$, aunque ese integrando es singular en los polos. La curvatura de Gauss de $ds^2 = \frac{1}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$ sale $4{,}000$: una esfera de radio 1/2 (Provost y Vallee 1980). La propuesta habla de "la mitad de un período métrico qg". Traducido a la base, **la distancia de Fubini–Study es la mitad del ángulo qang**, $d_{FS} = \theta/2$, la distancia de Wootters del capítulo 1.

34.6.2. OTOC: integrable contra caótico

En una cadena de 8 espines, con $W = Z_1$, $V = Z_8$ y temperatura infinita, el script compara el Ising transverso ($g = 1{,}05$, integrable) con el mismo modelo con un campo longitudinal de 0,5 (caótico):

- **El frente llega igual**: $F(t) = \mathrm{Re}\langle W(t)VW(t)V\rangle$ cae por debajo de 0,5 en $t = 4{,}0$ y $4{,}2$.
- **Lo que separa es el después**: el caótico se queda en $0{,}036$ de promedio ($+36$ m-qg) para t entre 10 y 30, y el integrable revive, con promedio $0{,}839$ (Figura 34.3).
- **El diagnóstico usual coincide**: el cociente medio de espaciamientos de niveles (10 espines, sector par de la reflexión) es $0{,}532$ en el caótico (GOE: 0,531) y $0{,}387$ en el integrable (Poisson: 0,386) (Oganesyan y Huse 2007; Atas et al. 2013).

El test de la propuesta no se puede hacer acá. Con 8 espines no hay una ventana exponencial separada del frente, y la cota $\lambda_L \le 2\pi k_B T/\hbar$ (Maldacena et al. 2016) es vacía a temperatura infinita. Esa cota tiene contenido en modelos de N grande a baja temperatura, como el SYK (Sachdev y Ye 1993; Maldacena y Stanford 2016), no en una cadena de 8 espines. Para Paulis, $F(t)$ es la lectura qg_X de un auxiliar en un protocolo interferométrico (Swingle et al. 2016), el mismo tipo de lectura que el decodificador del capítulo 15.

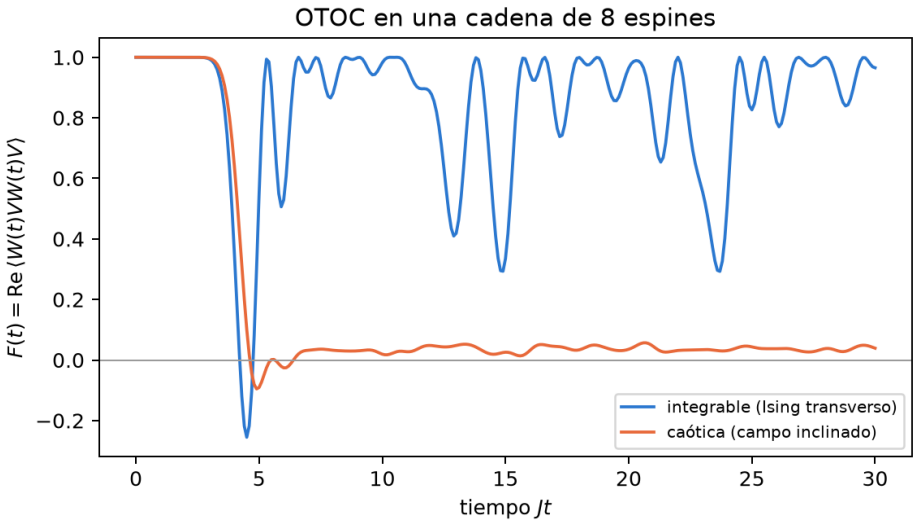


Figura 34.3: OTOC $F(t)$ de Z_1 y Z_8 en una cadena de 8 espines a temperatura infinita. El frente llega al mismo tiempo en las dos; la caótica se queda cerca de cero y la integrable revive.

34.7. La matriz de casos, revisada

Tabla 34.3: Los trece criterios de la propuesta, corridos.

fenómeno	criterio de la propuesta	resultado
Jordan–Wigner	fase acumulada $= \pi \equiv 0{,}5$ ciclo qg	**corregido**: test de Hadamard, -1000 m-qg (SWAP de qubits: $+1000$)
UCCSD (H_2)	$E \approx -1{,}137$ Ha, gradiente nulo en qg	**se cumple**: FCI a $5 \cdot 10^{-14}$; HF en $+975{,}1$ m-qg; la curva no se rehace
eco de Hahn	$F = 1$ independiente de $\Delta\omega$	**se cumple sólo estático**: 2 % de error de pulso, -1 m-qg; deriva, -180
Ising transverso	transición en $\theta = \pi/4$ con 2–4 espines	**falla**: el pico está en $g/J = 0{,}33$–$0{,}65$; se acerca a 1 con N

fenómeno	criterio de la propuesta	resultado
Kitaev	trenzado invariante ante $\epsilon(\theta)$	**falla como compuerta** ($6 \cdot 10^{-5}$ con 1 %); la protección es del hamiltoniano
Aharonov–Bohm	periodicidad cada cuanto	**se cumple** a 10^{-15}; el flujo es periódico, qg no; el signo pide qg_Y
Wigner	ortogonalidad y métrica de Lorentz	**se cumple** a 10^{-15}; $\Omega_W = 18{,}92°$
Brewster	cero exacto en θ_B	**se cumple**: $r_p = 0$ en $56{,}31°$
Goos–Hänchen	corrimiento de fase	**corregido**: es un desplazamiento, 0,64 λ
Bogoliubov	entropía del estado térmico	**se cumple**, y aparece $\theta/2 = \mathrm{gd}(r)$
Jarzynski	identidad con ΔF teórico	**se cumple** a $4 \cdot 10^{-15}$; el muestreo tiene sesgo
QFI GHZ	N^2 contra N	**se cumple**; la paridad alcanza N^2
Fubini–Study	curvatura $K = 4$	**se cumple**: $K = 4{,}000$; polo a polo $\pi/2 = \theta/2$
OTOC	polinomial contra exponencial, cota MSS	**no aplicable** con 8 espines; el promedio tardío sí separa

34.8. Sin qang y con qang

Tabla 34.4: Las trece pruebas, con y sin la escala.

tema	sin qang	con qang	diferencia
UCC	amplitud t	peso HF $+975{,}1$ m-qg, $\theta = 2\lvert t\rvert$	la amplitud es medio ángulo; la misma energía
Aharonov–Bohm	franjas en P	$\theta = 2\pi\Phi/\Phi_0$, desvío $1/2\pi\sqrt{N}$ constante	barra de error pareja (arcoseno); el signo pide otra lectura

tema	sin qang	con qang	diferencia
Bogoliubov	$\tanh^2 r$, $\bar{n}$, S	$\theta/2 = \mathrm{gd}(r)$	una identidad nueva, exacta
GHZ	QFI $= N^2$	Fisher de la paridad $(dqg)^2/(1-qg^2) = N^2$	la fórmula de un disparo del capítulo 1 alcanza la cota
Fubini–Study	$d_{FS} = \arccos\lvert\langle\psi\lvert\phi\rangle\rvert$	$d_{FS} = \theta/2$	la misma distancia (Wootters)
eco, Jarzynski	$\langle X\rangle$, probabilidades	lecturas en m-qg	sólo unidad
Ising	entropía, $\langle X\rangle$	$m_X \to 636{,}6$	ninguna: la escala no acerca el límite
Wigner, Kitaev, OTOC	grupo de Lorentz, hamiltoniano, espectro	traducción del ángulo a lectura	**ninguna**; "ciclos qg" no protegen ni miden caos

Balance. La propuesta acierta en la intuición: casi todo lo que mira tiene un ángulo o una probabilidad adentro. Falla en la moneda, porque "ciclo qg" y "período qg" no existen en la base. Traducida a lecturas, la escala aporta cuatro cosas concretas: la amplitud UCC como medio ángulo, la barra de error constante del flujo, la gudermanniana del vacío comprimido y la paridad GHZ en la cota cuántica a partir de la fórmula de un disparo. En el eco y en Jarzynski cambia sólo la unidad. En Wigner, Kitaev y el OTOC no aporta nada: la física está en el grupo, en el hamiltoniano o en el espectro. Dos criterios fallan tal como están escritos: el Ising con 2 a 4 espines y el trenzado como compuerta protegida. Todo es cálculo exacto o simulación, y no hay todavía un módulo de qang para estos temas.

34.9. En código

```
import math
from qang import probability as PB

# UCC para H2: peso de Hartree-Fock en el mínimo
t = -0.11176849913374033
PB.milliqang_from_p0(math.cos(t) ** 2)       # +975,1 m-qg; ángulo qang 2|t| = 0,2235 rad
```

```
# Bogoliubov: el medio ángulo qang del vacío es la gudermanniana
r = 1.0
theta = PB.theta_from_milliqang(PB.milliqang_from_p0(1 / math.cosh(r) ** 2))
theta / 2, math.atan(math.sinh(r))              # 0,8658 y 0,8658
```

34.10. Resumen

- La base no tiene "ciclos qg": qg es una lectura en $[-1, 1]$. Las fases se leen en qg_X o qg_Y con un interferómetro, y las probabilidades, directamente.
- El signo de un intercambio fermiónico es -1000 m-qg en un test de Hadamard; la amplitud UCC de H_2 es medio ángulo qang ($+975{,}1$ m-qg en el mínimo FCI).
- El eco de Hahn recupera $+1000$ m-qg sólo con desintonía estática; el Ising con 2 a 4 espines no muestra la transición en $\theta = \pi/4$, y el trenzado de Majorana escrito como compuerta no está protegido.
- El ángulo qang de un anillo de Aharonov–Bohm es la fase, con barra de error $1/2\pi\sqrt{N}$ constante; el medio ángulo del vacío comprimido es $\mathrm{gd}(r)$.
- La paridad GHZ alcanza la información cuántica N^2 con la fórmula de un disparo del capítulo 1, y la distancia de Fubini–Study es la mitad del ángulo qang.
- Wigner, Jarzynski y el OTOC se cumplen o se diagnostican con las herramientas usuales; la escala sólo los traduce.

Notas bibliográficas

El mapeo de Jordan–Wigner es Jordan y Wigner (1928), y el UCC para VQE, Romero et al. (2018); la energía de H_2 sigue a O'Malley et al. (2016). El eco es Hahn (1950), y la precesión, Bloch (1946). El Ising transverso resuelto es Pfeuty (1970), y la entropía de entrelazamiento en la criticidad, Calabrese y Cardy (2004). La cadena de Kitaev es Kitaev (2001), y el trenzado de Majorana, Ivanov (2001). El efecto Aharonov–Bohm es Aharonov y Bohm (1959). La precesión de Thomas es Thomas (1926); las representaciones de Wigner, Wigner (1939), y la composición de impulsos, O'Donnell y Visser (2011). Fresnel y Brewster siguen Born et al. (1999); el desplazamiento lateral es Goos y Hänchen (1947) y Artmann (1948). El efecto Unruh es Unruh (1976) (revisión: Crispino et al. (2008)). La igualdad de Jarzynski es Jarzynski (1997), y el trabajo con dos mediciones, Talkner et al. (2007). La espectroscopía con estados GHZ es Bollinger et al. (1996), y la metrología cuántica, Giovannetti et al. (2006) y Braunstein y Caves (1994). La métrica

de Fubini–Study como estructura riemanniana es Provost y Vallee (1980). La cota del caos es Maldacena et al. (2016); el SYK, Sachdev y Ye (1993) y Maldacena y Stanford (2016); la medición del scrambling, Swingle et al. (2016), y los cocientes de espaciamientos, Oganesyan y Huse (2007) y Atas et al. (2013). Los scripts que verifican el capítulo están en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Parte XIII

XIII. Ecosistema: qang dentro de otras librerías

35 qang como módulo: modificaciones a las librerías cuánticas y de aprendizaje

Cada capítulo de este libro fue dejando anotado qué le pediría a una librería existente. Este capítulo cumple esa lista. qang 0.13.0 trae un subpaquete nuevo, `qang.integrations`, con un módulo por librería: mitiq, qiskit-experiments, Qiskit Dynamics, QuTiP, Stim, scikit-learn, JAX, PyTorch, Qibo, pytket, Amazon Braket y CUDA-Q de NVIDIA. Cada módulo pone las tres cosas de qang (las lecturas, el filtro y las reglas cerradas) en los términos de esa librería y tiene su test en `tests/test_integrations.py`. Las cifras de este capítulo salen de `tools/make_cap35_numbers.py`, que corre en tres entornos, porque no todas las librerías caben en uno. Ninguna cifra viene de hardware real. El capítulo separa lo que está hecho y probado dentro de qang de lo que todavía habría que proponerle a cada proyecto.

La versión siguiente, 0.14.0, agrega el módulo `qang.qga`, con la escala angular del capítulo 1 (Sección 1.4): 1000 qga por vuelta y las conversiones a radianes, a p_0 y a m-qg. Las integraciones de este capítulo no cambian, y las cifras se midieron con 0.13.0.

35.1. Desde la base: qué lleva cada librería

La base del capítulo 1 es una probabilidad p_0 y sus lecturas, $qg_Z = 2p_0 - 1$, $m = 1000\, qg_Z$ y $\theta = \arccos qg_Z$. Lo que qang le agrega a otra librería es siempre una de tres cosas:

- **una lectura**: convertir lo que la librería ya mide (conteos, poblaciones, detectores, probabilidades) en qg_Z y m-qg, con un solo orden de qubits (capítulo 32);
- **el filtro**: quedarse con los disparos del sector de peso de Hamming del circuito, con su fracción conservada K (capítulos 21 y 22);
- **una regla cerrada**: la regla de costo del filtro (capítulo 21), la forma cerrada de la calibración con anuncio (§31) o el área de pulso mínima (§160).

35.2. Cómo está hecho

- **Nada se importa de más.** `import qang` sigue necesitando sólo NumPy. Cada submódulo importa su librería cuando se lo pide, y si falta, el error dice qué instalar: `pip install "qang[mitiq]"`, `qang[stim]`, etcétera.
- **Un extra por librería** en `pyproject.toml`, más uno, `integrations`, con todas las que conviven en un mismo entorno.
- **Cada test se salta solo** si su librería no está instalada. Por eso el CI del repositorio, que instala `qang[all]`, corre los de scikit-learn y salta los demás.

Tabla 35.1: Las integraciones de qang 0.13.0.

librería	módulo	versión probada	entorno	test
mitiq	`integrations.mitiq`	1.1.0	`.venv-int`	pasa
qiskit-experiments	`integrations.qiskit_experiments`	0.14.2 (Qiskit 2.6.1)	`.venv-int`	pasa
Qiskit Dynamics	`integrations.qiskit_dynamics`	0.6.0 (Qiskit 1.3.0)	`.venv-dyn`	pasa
QuTiP	`integrations.qutip`	5.3.1	`.venv-int`	pasa
Stim + PyMatching	`integrations.stim`	1.16.0 + 2.4.0	`.venv-int`	pasa
scikit-learn	`integrations.sklearn`	1.9.1	`.venv-int` y CI	pasa
JAX (+ PennyLane)	`integrations.jax`	0.8.3 (PennyLane 0.45.1)	`.venv-int`	pasa
PyTorch (+ PennyLane)	`integrations.torch`	2.11.1 (CPU)	`.venv-int`	pasa
Qibo	`integrations.qibo`	0.3.6	`.venv-int`	pasa
pytket	`integrations.pytket`	2.14.5	`.venv-int`	pasa
Amazon Braket	`integrations.braket`	1.127.5	`.venv-int`	pasa
CUDA-Q	`integrations.cudaq`	0.16.0	WSL (Ubuntu)	pasa (CPU)

35.3. Mitigación: mitiq

mitiq ya sabe posseleccionar por peso de Hamming: su `post_select` trae ese mismo ejemplo. No hacía falta escribirlo de nuevo. Lo que qang agrega encima es:

- `qg_z` y `filtered_qg_z`, para leer un `MeasurementResult` en qg;
- `qg_executor`, que convierte un muestreador en el ejecutor de valor real que usan las técnicas de mitiq;
- `execute_with_filter_zne`, que combina el filtro con la extrapolación a ruido cero;
- `filter_rule`, la regla del capítulo 21.

El script corre un circuito de peso 1 de tres qubits (rotaciones de Givens en Cirq), con amortiguamiento de amplitud de 0,05 y desfase de 0,03 por momento, y lee el qubit 1. El valor exacto es $-257{,}3$ m-qg:

Tabla 35.2: Error en m-qg de la lectura del qubit 1, ZNE de Richardson con factores 1, 3 y 5 y plegado global.

ruido	crudo	filtrado	crudo + ZNE	filtrado + ZNE
T1	233,2	**0,0**	49,4	**0,0**
T1 + desfase	257,9	30,3	55,9	**1,1**

Con sólo T1, el filtro es exacto (capítulo 21, F1) y la ZNE no tiene nada que corregir. Con T1 y desfase, el filtro deja sólo el desfase y la ZNE lo saca (F6): el error baja de 30,3 a 1,1 m-qg. La ZNE sobre la lectura cruda queda en 55,9 m-qg, porque el T1 no escala bien con el plegado. **La propuesta para mitiq** es la combinación: posselección, después ZNE, con la regla de costo para decidir si filtrar. Las piezas sueltas ya existían.

35.4. Calibración: qiskit-experiments

`HeraldedReadout` es un experimento del framework con dos circuitos (anuncio, I o X, medición) y un análisis con la forma cerrada de §31. Corre en el simulador Aer con error de lectura $e_{01} = 0{,}015$, $e_{10} = 0{,}04$, y con una población térmica p preparada por purificación:

Tabla 35.3: Calibración estándar contra la calibración con anuncio, 200 000 disparos por circuito.

p	e_{01} estándar	e_{01} qg	e_{10} estándar	e_{10} qg	p qg	T_{ef} (5 GHz)
0	0,0148	0,0151	0,0401	0,0396	0,0000	0 mK
0,01	0,0244	0,0151	0,0494	0,0397	0,0099	52,1 mK
0,03	0,0431	0,0151	0,0683	0,0396	0,0297	68,8 mK

p	e_{01} estándar	e_{01} qg	e_{10} estándar	e_{10} qg	p qg	T_{ef} (5 GHz)
0,08	0,0900	0,0150	0,1152	0,0401	0,0794	97,9 mK

La calibración estándar suma la temperatura al error de lectura, $e_{01} + p\,b$, y ve el qubit frío. La forma cerrada separa las dos cosas. Es el resultado de §31 y del capítulo 27, ahora dentro de un `BaseExperiment` que se corre con `exp.run(backend)`. **Es la propuesta más concreta del capítulo** para qiskit-experiments, porque el capítulo 18 mostró que la calibración estándar puede dejar inseguro a un certificador de números aleatorios.

35.5. Sistemas abiertos: QuTiP

`qg_readings` lee (qg_X, qg_Y, qg_Z) de cada qubit de un `Qobj`, `mesolve_qg` lee la evolución de `mesolve`, y `t1_collapse` arma los operadores de colapso de T1 parejo. Con un estado W de tres qubits y $t/T_1 = 0{,}6$, la lectura cruda de cada qubit es $+634{,}1$ m-qg y la filtrada es $+333{,}333$, el valor sin ruido. La fracción conservada es $0{,}5488 = e^{-0{,}6}$, como predice el capítulo 21. Es la misma comprobación que los capítulos 19 y 21 hacían integrando Lindblad a mano, ahora con el integrador de QuTiP.

35.6. Corrección de errores: Stim

Un detector que dispara con probabilidad p lee $qg = 1 - 2p$. Con el código de repetición de distancia 5, 5 rondas y 200 000 muestras:

Tabla 35.4: Lecturas qg de un código de repetición en Stim; decodificación con PyMatching.

ruido p	detectores (m-qg)	lógico crudo	lógico decodificado
0,01	972,4 a 1000,0	933,7	1000,0
0,03	919,0 a 1000,0	815,2	999,1
0,06	841,8 a 1000,0	660,1	993,7

Decodificar es llevar el lógico al polo. Los detectores de la última ronda quedan en $+1000$ porque el ruido entra antes de cada ronda. `measurement_qg` también aplica

el filtro a los registros de medición. **La propuesta para Stim/PyMatching** sigue siendo la del capítulo 26, la reponderación consciente del T1 (2,1 a 2,5 veces), que este módulo todavía no implementa.

35.7. Aprendizaje: scikit-learn, JAX y PyTorch

- **scikit-learn.** `WeightQNNClassifier` y `MultiClassQNNClassifier` tienen `fit`, `predict`, `decision_function` y `score`, aceptan cualquier etiqueta y funcionan en `Pipeline`, `cross_val_score` y `GridSearchCV`. En el conjunto de las dos lunas (120 puntos), con T1 de 0,15 y validación cruzada de 5 pliegues, el modelo con filtro acierta 0,833 ± 0,083 y el crudo 0,842 ± 0,081. **No hay diferencia**, como en el capítulo 20: entrenado con el ruido calibrado, el modelo sin filtro lo alcanza. `GridSearchCV` puede decidir `qang=True/False` como un hiperparámetro más.
- **JAX.** Las lecturas y el filtro escritos con `jax.numpy` se pueden pasar por `jit`, `grad` y `vmap`. El gradiente de una pérdida filtrada a través de un QNode de PennyLane con `interface="jax"` coincide con diferencias finitas a $2 \cdot 10^{-10}$. Era lo que el capítulo 20 dejaba sin probar. Para lograrlo apareció un conflicto: PennyLane 0.45 usa `jax.core.is_concrete`, que JAX 0.12 eliminó, y funciona sólo con JAX < 0.9.
- **PyTorch.** `WeightQNNTorch` es un `nn.Module`: una `TorchLayer` de PennyLane con rotaciones `SingleExcitation`, que conservan el peso, la lectura filtrada y una capa lineal. Con T1 de 0,1 por capa, la lectura filtrada difiere de la limpia en $1{,}2 \cdot 10^{-16}$ y la cruda en 262,5 m-qg. El gradiente pasa por `backward()`.

35.8. Pulsos: Qiskit Dynamics

`rabi_qg` resuelve un qubit excitado en resonancia y devuelve qg_Z. Contra $\cos A$, con A el área del pulso, el error es de $1{,}1 \cdot 10^{-7}$ a $5 \cdot 10^{-7}$ con pulso cuadrado y de $5 \cdot 10^{-7}$ a $1{,}9 \cdot 10^{-6}$ con pulso gaussiano, para A igual a $\pi/2$, π y 2,2. Es la base de la regla del área mínima de §160. **El conflicto**: Qiskit Dynamics 0.6 exige `qiskit<=1.3`, así que no convive con Qiskit 2.x y necesita su propio entorno.

35.9. SDKs: Qibo, pytket, Braket y CUDA-Q

Cada uno recibe la rotación qang ($R_Y(\arccos qg)$) y la lectura canónica con el filtro:

- **Qibo**: la lectura de $qg = 0{,}6$ con 100 000 disparos da 0,5978;
- **pytket**: da el valor exacto, $-0{,}25$, desde el vector de estado. pytket mide los ángulos en medias vueltas, no en radianes, y `rqang` hace la conversión. Es el tipo de error de unidades que esta escala busca evitar. En la escala qga del capítulo 1, media vuelta son 500 qga, así que pasar de pytket a qga es multiplicar por 500;
- **Braket**: corre en el `LocalSimulator`, que deja de ser sólo un formato de resultados (capítulo 32); la lectura de 0,2 da 0,201;
- **CUDA-Q**: corre en WSL con CUDA-Q 0.16.0. En el simulador de CPU (`qpp-cpu`), la lectura de $-0{,}5$ da $-0{,}5018$ y el filtro conserva 0,7509, contra 0,75 esperado. El simulador de GPU (`nvidia`, cuStateVec) no arrancó, porque el controlador de CUDA que ve WSL es más viejo que el runtime de CUDA-Q. Hay que actualizar el controlador de NVIDIA de Windows; el código no cambia, sólo `cudaq.set_target("nvidia")`.

35.10. Lo que se propone a cada proyecto

Lo que está en `qang.integrations` ya funciona. Lo que sigue es lo que valdría la pena llevar a cada proyecto, ordenado por el respaldo que tiene en el libro:

Tabla 35.5: Propuestas para cada proyecto, con su respaldo.

proyecto	propuesta	respaldo	fuerza
qiskit-experiments	calibración con anuncio: separa temperatura y lectura	§31, capítulos 18 y 27, Tabla 35.3	**fuerte**
mitiq	posselección + ZNE con la regla de costo	capítulo 21, Tabla 35.2	**fuerte**
scikit-learn (vía qang)	QNN de peso como estimador	capítulo 20	útil, sin ventaja de exactitud
PennyLane	arreglar la compatibilidad con JAX ≥ 0.9 (`is_concrete`)	este capítulo	un error real del ecosistema
Qiskit Dynamics	soporte de Qiskit 2.x	este capítulo	un error real del ecosistema
PyMatching / Stim	reponderación consciente del T1	capítulo 26	moderada (pierde un 15 % con despolarizante)

proyecto	propuesta	respaldo	fuerza
transpilador de Qiskit	conservar compuertas que conservan N	capítulo 24	moderada
qiskit-machine-learning	filtro como reparación de la matriz de Gram	capítulo 23	débil (un solo núcleo)
PennyLane	NaN en el jacobiano de `qml.probs` a través de `SingleExcitation` con `default.mixed` y `backprop` (0.45.1)	capítulo 20	un error real del ecosistema
qiskit-machine-learning	`SamplerQNN` lee los bits en las posiciones físicas del *layout* (0.9.1)	capítulo 20, §140	un error real, citado de las notas

35.11. Conflictos de entorno

Poner todo en un entorno no se pudo, y los conflictos son información:

- Qiskit Dynamics 0.6 exige `qiskit<=1.3`;
- PennyLane 0.45 no funciona con JAX ≥ 0.9;
- amazon-braket-sdk fija `cloudpickle==2.2.1`, y el joblib reciente (que usa scikit-learn) pide ≥ 3.0. Las dos funcionaron con cloudpickle 3.1.2, pero pip avisa del conflicto;
- mitiq 1.1 bajó NumPy a 2.2.6;
- CUDA-Q no tiene ruedas para Windows y se probó en WSL; su simulador de GPU necesita un controlador de NVIDIA más nuevo.

Por eso hay tres entornos: `.venv-int` con casi todo, `.venv-dyn` para Qiskit Dynamics y WSL para CUDA-Q. El `.venv` del libro quedó intacto.

35.12. Sin qang y con qang

Tabla 35.6: Las integraciones, con y sin la escala.

librería	sin qang	con qang	diferencia
mitiq	`post_select` y ZNE por separado	ZNE de la lectura filtrada + regla	55,9 → 1,1 m-qg con T1 y desfase
qiskit-experiments	e_{01} inflado por $p\,b$, qubit “frío”	e_{01}, p y T_{ef} insesgados	separa dos errores que el estándar confunde
QuTiP	expectativas de operadores	lecturas en m-qg y filtro	filtro exacto bajo T1 a 10^{-6}
Stim	tasas de detección	detectores y lógicos en m-qg	sólo unidad
scikit-learn	sin estimador para la QNN	`fit`/`predict`, CV, búsqueda	API; exactitud igual (0,833 contra 0,842)
JAX	lectura filtrada sin probar	`jit`/`grad`, $2 \cdot 10^{-10}$	probado, con JAX < 0.9
PyTorch	sin capa de peso	`WeightQNNTorch`	filtro exacto bajo T1 dentro de torch
Dynamics	poblaciones	$qg_Z = \cos A$ a 10^{-6}	sólo unidad
SDKs	órdenes de bits y unidades distintos	una lectura canónica	evita errores de orden y de medias vueltas

Balance. Dos integraciones aportan algo que la librería no tiene: la calibración con anuncio, que separa temperatura y lectura, y la ZNE de la lectura filtrada con la regla de costo. Las de aprendizaje abren el uso sin mejorar la exactitud, que es lo que el capítulo 20 ya había medido. Las demás son traducción: lecturas en m-qg y un solo orden de qubits, que es poco pero evita errores reales, como el de las medias vueltas de pytket. Ninguna cifra viene de hardware. Tres propuestas ya se publicaron, el 25 de octubre de 2026: la calibración con anuncio en qiskit-experiments (issue #1662), la posselección con ZNE y su regla de costo en mitiq (issue #3173) y la reponderación consciente del T1 en una discusión de PyMatching (#190). Los borradores y la revisión previa al envío están en `docs/upstream/`; las demás todavía no se enviaron.

35.13. En código

```
# pip install "qang[mitiq]"  (o qang[experiments], qang[sklearn], qang[integrations], .
from qang.integrations import mitiq as qm

ejecutor = qm.qg_executor(muestreador, weight=1)       # circuito -> qg_Z medio filtrado
valor = qm.execute_with_filter_zne(circuito, muestreador, weight=1, scale_factors=(1, 3

from qang.integrations.qiskit_experiments import HeraldedReadout
exp = HeraldedReadout([0], backend=backend, frequency=5e9)
resultados = exp.run().block_for_results()          # e01, e10, p_excited, m_eq, T_eff

from qang.integrations.sklearn import WeightQNNClassifier
from sklearn.model_selection import GridSearchCV
GridSearchCV(WeightQNNClassifier(gamma=0.15), {"qang": [True, False]}, cv=3).fit(X, y)
```

35.14. Resumen

- qang 0.13.0 tiene `qang.integrations`, con doce librerías, un extra por cada una y tests que se saltan solos; 0.14.0 agrega `qang.qga`, la escala angular.
- mitiq: el filtro con la ZNE baja el error de 55,9 a 1,1 m-qg con T1 y desfase; la posselección ya existía.
- qiskit-experiments: la calibración con anuncio da e_{01}, p y T_{ef} sin sesgo, donde la estándar ve el qubit frío.
- QuTiP, Stim, Qiskit Dynamics y los SDKs reciben lecturas en m-qg y el filtro, y los cuatro SDKs comparten el mismo orden de qubits.
- scikit-learn, JAX y PyTorch hacen que las redes de peso se entrenen como cualquier modelo, sin ventaja de exactitud.
- Tres conflictos de entorno quedan documentados: Qiskit Dynamics con Qiskit 2, PennyLane con JAX ≥ 0.9 y Braket con cloudpickle.

Notas bibliográficas

mitiq es LaRose et al. (2022); QuTiP, Johansson et al. (2012); Stim, Gidney (2021), y PyMatching, Higgott (2022). qiskit-experiments es Kanazawa et al. (2023), y Qiskit Dynamics, Puzzuoli et al. (2023), sobre Qiskit (Javadi-Abhari et al. 2024). scikit-learn es Pedregosa et al. (2011); JAX, Bradbury et al. (2018); PyTorch, Paszke et al.

(2019), y PennyLane, Bergholm et al. (2018). Qibo es Efthymiou et al. (2021); pytket, Sivarajah et al. (2020); Amazon Braket, Amazon Web Services (2020); Cirq, Cirq Developers (2026), y CUDA-Q, Kim et al. (2023). La verificación de simetría que mitiq ya hace es la de Bonet-Monroig et al. (2018) y McArdle et al. (2019), y la extrapolación a ruido cero, Temme et al. (2017). El código está en el repositorio (Monteverde 2026b); la definición de la unidad qang, en Monteverde (2026c).

Bibliografía

Obras citadas en los capítulos 1 a 35. Cada capítulo cierra con sus notas bibliográficas; los registros con DOI se generaron a partir de los metadatos de doi.org.

Abdurakhimov, Leonid, Janos Adam, Hasnain Ahmad, et al. 2024. *Technology and Performance Benchmarks of IQM's 20-Qubit Quantum Computer*. arXiv. https://doi.org/10.48550/ARXIV.2408.12433.

Aguilar, A., others, y LSND Collaboration. 2001. «Evidence for neutrino oscillations from the observation of $\bar{\nu}_e$ appearance in a $\bar{\nu}_\mu$ beam». *Physical Review D* 64 (11). https://doi.org/10.1103/physrevd.64.112007.

Aharonov, Y., y J. Anandan. 1987. «Phase change during a cyclic quantum evolution». *Physical Review Letters* 58 (16): 1593-96. https://doi.org/10.1103/physrevlett.58.1593.

Aharonov, Y., y D. Bohm. 1959. «Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory». *Physical Review* 115 (3): 485-91. https://doi.org/10.1103/physrev.115.485.

Aharonov, Y., L. Davidovich, y N. Zagury. 1993. «Quantum random walks». *Physical Review A* 48 (2): 1687-90. https://doi.org/10.1103/physreva.48.1687.

Alagic, Gorjan, Maxime Bros, Pierre Ciadoux, et al. 2025. *Status report on the fourth round of the NIST post-quantum cryptography standardization process*. National Institute of Standards; Technology (U.S.). https://doi.org/10.6028/nist.ir.8545.

Alicki, Robert, y Mark Fannes. 2013. «Entanglement boost for extractable work from ensembles of quantum batteries». *Physical Review E* 87 (4). https://doi.org/10.1103/physreve.87.042123.

Allahverdyan, A. E, R Balian, y Th. M Nieuwenhuizen. 2004. «Maximal work extraction from finite quantum systems». *Europhysics Letters (EPL)* 67 (4): 565-71. https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10101-2.

Amari, Shun-ichi. 1998. «Natural Gradient Works Efficiently in Learning». *Neural Computation* 10 (2): 251-76. https://doi.org/10.1162/089976698300017746.

Amazon Web Services. 2020. *Amazon Braket Python SDK*. Https://github.com/amazon-braket/amazon-braket-sdk-python.

Anscombe, F. J. 1948. «The transformation of Poisson, binomial and negative-binomial data». *Biometrika* 35 (3-4): 246-54. https://doi.org/10.1093/biomet/35.3-4.246.

Artmann, Kurt. 1948. «Berechnung der Seitenversetzung des totalreflektierten Strahles». *Annalen der Physik* 437 (1-2): 87-102. https://doi.org/10.1002/andp.19484370108.

Arute, Frank, Kunal Arya, Ryan Babbush, et al. 2019. «Quantum supremacy using a programmable superconducting processor». *Nature* 574 (7779): 505-10. https://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5.

Atas, Y. Y., E. Bogomolny, O. Giraud, y G. Roux. 2013. «Distribution of the Ratio of Consecutive Level Spacings in Random Matrix Ensembles». *Physical Review Letters* 110 (8). https://doi.org/10.1103/physrevlett.110.084101.

Barenco, Adriano, Charles H. Bennett, Richard Cleve, et al. 1995. «Elementary gates for quantum computation». *Physical Review A* 52 (5): 3457-67. https://doi.org/10.1103/physreva.52.3457.

Bartlett, M. S. 1947. «The Use of Transformations». *Biometrics* 3 (1): 39. https://doi.org/10.2307/3001536.

Baumgratz, T., M. Cramer, y M. B. Plenio. 2014. «Quantifying Coherence». *Physical Review Letters* 113 (14). https://doi.org/10.1103/physrevlett.113.140401.

Beenakker, C. W. J. 1991. «Theory of Coulomb-blockade oscillations in the conductance of a quantum dot». *Physical Review B* 44 (4): 1646-56. https://doi.org/10.1103/physrevb.44.1646.

Bell, J. S. 1964. «On the Einstein Podolsky Rosen paradox». *Physics Physique физика* 1 (3): 195-200. https://doi.org/10.1103/physicsphysiquefizika.1.195.

Bennett, Charles H., y Gilles Brassard. 2014. «Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing». *Theoretical Computer Science* 560: 7-11. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.05.025.

Bennett, Charles H., Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, y William K. Wootters. 1993. «Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels». *Physical Review Letters* 70 (13): 1895-99. https://doi.org/10.1103/physrevlett.70.1895.

Bergholm, Ville, Josh Izaac, Maria Schuld, et al. 2018. *PennyLane: Automatic differentiation of hybrid quantum-classical computations*. arXiv. https://doi.org/10.48550/ARXIV.1811.04968.

Bernstein, Ethan, y Umesh Vazirani. 1997. «Quantum Complexity Theory». *SIAM Journal on Computing* 26 (5): 1411-73. https://doi.org/10.1137/s0097539796300921.

Berry, Michael Victor. 1984. «Quantal phase factors accompanying adiabatic changes». *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 392 (1802): 45-57. https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0023.

Berta, Mario, Matthias Christandl, Roger Colbeck, Joseph M. Renes, y Renato Renner. 2010. «The uncertainty principle in the presence of quantum memory». *Nature Physics* 6 (9): 659-62. https://doi.org/10.1038/nphys1734.

Bhattacharyya, Anil Kumar. 1943. «On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions». *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* 35: 99-109.

Bilenky, S. M., J. Hošek, y S. T. Petcov. 1980. «On the oscillations of neutrinos with Dirac and Majorana masses». *Physics Letters B* 94 (4): 495-98. https://doi.org/10.1016/0370-2693(80)90927-2.

Blanter, Ya.M., y M. Büttiker. 2000. «Shot noise in mesoscopic conductors». *Physics Reports* 336 (1-2): 1-166. https://doi.org/10.1016/s0370-1573(99)00123-4.

Bloch, F. 1946. «Nuclear Induction». *Physical Review* 70 (7-8): 460-74. https://doi.org/10.1103/physrev.70.460.

Bollinger, J. J ., Wayne M. Itano, D. J. Wineland, y D. J. Heinzen. 1996. «Optimal frequency measurements with maximally correlated states». *Physical Review A* 54 (6): R4649-52. https://doi.org/10.1103/physreva.54.r4649.

Bonet-Monroig, X., R. Sagastizabal, M. Singh, y T. E. O'Brien. 2018. «Low-cost error mitigation by symmetry verification». *Physical Review A* 98 (6). https://doi.org/10.1103/physreva.98.062339.

Born, Max. 1926. «Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge». *Zeitschrift für Physik* 37 (12): 863-67. https://doi.org/10.1007/bf01397477.

Born, Max, Emil Wolf, A. B. Bhatia, et al. 1999. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9781139644181.

Bradbury, James, Roy Frostig, Peter Hawkins, et al. 2018. *JAX: composable transformations of Python+NumPy programs*. Https://github.com/jax-ml/jax.

Brassard, Gilles, Peter Høyer, Michele Mosca, y Alain Tapp. 2002. «Quantum amplitude amplification and estimation». En *Quantum Computation and Information*. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/conm/305/05215.

Braunstein, Samuel L., y Carlton M. Caves. 1994. «Statistical distance and the geometry of quantum states». *Physical Review Letters* 72 (22): 3439-43. https://doi.org/10.1103/physrevlett.72.3439.

Bravyi, Sergey, Sarah Sheldon, Abhinav Kandala, David C. Mckay, y Jay M. Gambetta. 2021. «Mitigating measurement errors in multiqubit experiments». *Physical Review A* 103 (4). https://doi.org/10.1103/physreva.103.042605.

Briegel, H.-J., W. Dür, J. I. Cirac, y P. Zoller. 1998. «Quantum Repeaters: The Role of Imperfect Local Operations in Quantum Communication». *Physical Review Letters* 81 (26): 5932-35. https://doi.org/10.1103/physrevlett.81.5932.

Buhrman, Harry, Richard Cleve, John Watrous, y Ronald de Wolf. 2001. «Quantum Fingerprinting». *Physical Review Letters* 87 (16). https://doi.org/10.1103/physrevlett.87.167902.

Büttiker, M. 1986. «Four-Terminal Phase-Coherent Conductance». *Physical Review Letters* 57 (14): 1761-64. https://doi.org/10.1103/physrevlett.57.1761.

Calabrese, Pasquale, y John Cardy. 2004. «Entanglement entropy and quantum field theory». *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2004 (06): P06002. https://doi.org/10.1088/1742-5468/2004/06/p06002.

Campaioli, Francesco, Stefano Gherardini, James Q. Quach, Marco Polini, y Gian Marcello Andolina. 2024. «Colloquium: Quantum batteries». *Reviews of Modern Physics* 96 (3). https://doi.org/10.1103/revmodphys.96.031001.

Cerezo, M., Martin Larocca, Diego García-Martín, et al. 2023. *Does provable ab-*

sence of barren plateaus imply classical simulability? arXiv. https://doi.org/10.48550/ARXIV.2312.09121.

Cerezo, M., Akira Sone, Tyler Volkoff, Lukasz Cincio, y Patrick J. Coles. 2021. «Cost function dependent barren plateaus in shallow parametrized quantum circuits». *Nature Communications* 12 (1). https://doi.org/10.1038/s41467-021-21728-w.

Chin, Alex W., Susana F. Huelga, y Martin B. Plenio. 2012. «Quantum Metrology in Non-Markovian Environments». *Physical Review Letters* 109 (23). https://doi.org/10.1103/physrevlett.109.233601.

Chou, C. W., D. B. Hume, T. Rosenband, y D. J. Wineland. 2010. «Optical Clocks and Relativity». *Science* 329 (5999): 1630-33. https://doi.org/10.1126/science.1192720.

Cirq Developers. 2026. *Cirq*. Zenodo. https://doi.org/10.5281/ZENODO.4062499.

Coffman, Valerie, Joydip Kundu, y William K. Wootters. 2000. «Distributed entanglement». *Physical Review A* 61 (5). https://doi.org/10.1103/physreva.61.052306.

Correa, Luis A., Mohammad Mehboudi, Gerardo Adesso, y Anna Sanpera. 2015. «Individual Quantum Probes for Optimal Thermometry». *Physical Review Letters* 114 (22). https://doi.org/10.1103/physrevlett.114.220405.

Cramér, Harald. 1946. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press.

Crispino, Luís C. B., Atsushi Higuchi, y George E. A. Matsas. 2008. «The Unruh effect and its applications». *Reviews of Modern Physics* 80 (3): 787-838. https://doi.org/10.1103/revmodphys.80.787.

Cross, Andrew W., Lev S. Bishop, Sarah Sheldon, Paul D. Nation, y Jay M. Gambetta. 2019. «Validating quantum computers using randomized model circuits». *Physical Review A* 100 (3). https://doi.org/10.1103/physreva.100.032328.

Datta, Supriyo. 1995. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511805776.

Dennis, Eric, Alexei Kitaev, Andrew Landahl, y John Preskill. 2002. «Topological quantum memory». *Journal of Mathematical Physics* 43 (9): 4452-505. https://doi.org/10.1063/1.1499754.

Deutsch, David. 1991. «Quantum mechanics near closed timelike lines». *Physical Review D* 44 (10): 3197-217. https://doi.org/10.1103/physrevd.44.3197.

Deutsch, David, y Richard Jozsa. 1992. «Rapid solution of problems by quantum computation». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 439 (1907): 553-58. https://doi.org/10.1098/rspa.1992.0167.

Dirac, P. A. M. 1928. «The quantum theory of the electron». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 117 (778): 610-24. https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023.

Doherty, Marcus W., Neil B. Manson, Paul Delaney, Fedor Jelezko, Jörg Wrachtrup, y Lloyd C. L. Hollenberg. 2013. «The nitrogen-vacancy colour centre in diamond». *Physics Reports* 528 (1): 1-45. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2013.02.001.

Dolinski, Michelle J., Alan W. P. Poon, y Werner Rodejohann. 2019. «Neutrinoless Double-Beta Decay: Status and Prospects». *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 69 (1): 219-51. https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-101918-023407.

Dréau, A., M. Lesik, L. Rondin, et al. 2011. «Avoiding power broadening in optically detected magnetic resonance of single NV defects for enhanced dc magnetic field sensitivity». *Physical Review B* 84 (19). https://doi.org/10.1103/physrevb.84.195204.

Duan, Huaiyu, George M. Fuller, y Yong-Zhong Qian. 2010. «Collective Neutrino Oscillations». *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 60 (1): 569-94. https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.012809.104524.

Efthymiou, Stavros, Sergi Ramos-Calderer, Carlos Bravo-Prieto, et al. 2021. «Qibo : a framework for quantum simulation with hardware acceleration». *Quantum Science and Technology* 7 (1): 015018. https://doi.org/10.1088/2058-9565/ac39f5.

Elzerman, J. M., R. Hanson, L. H. Willems van Beveren, B. Witkamp, L. M. K. Vandersypen, y L. P. Kouwenhoven. 2004. «Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot». *Nature* 430 (6998): 431-35. https://doi.org/10.1038/nature02693.

Englert, Berthold-Georg. 1996. «Fringe Visibility and Which-Way Information: An Inequality». *Physical Review Letters* 77 (11): 2154-57. https://doi.org/10.1103/

physrevlett.77.2154.

Esteban, Ivan, M. C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Thomas Schwetz, y Albert Zhou. 2020. «The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations». *Journal of High Energy Physics* 2020 (9). https://doi.org/10.1007/jhep09(2020)178.

Fano, U. 1947. «Ionization Yield of Radiations. II. The Fluctuations of the Number of Ions». *Physical Review* 72 (1): 26-29. https://doi.org/10.1103/physrev.72.26.

Farhi, Edward, Jeffrey Goldstone, y Sam Gutmann. 2014. *A Quantum Approximate Optimization Algorithm*. arXiv. https://doi.org/10.48550/ARXIV.1411.4028.

Feynman, R. P. 1939. «Forces in molecules». *Physical Review* 56 (4): 340-43. https://doi.org/10.1103/PhysRev.56.340.

Feynman, R. P. 1949. «The theory of positrons». *Physical Review* 76 (6): 749-59. https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.749.

Fowler, Austin G., Matteo Mariantoni, John M. Martinis, y Andrew N. Cleland. 2012. «Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation». *Physical Review A* 86 (3). https://doi.org/10.1103/physreva.86.032324.

Fréchet, Maurice. 1907. «Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires». *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 144: 1414-16.

Freeman, Murray F., y John W. Tukey. 1950. «Transformations Related to the Angular and the Square Root». *The Annals of Mathematical Statistics* 21 (4): 607-11. https://doi.org/10.1214/aoms/1177729756.

Gao, Ping, Daniel Louis Jafferis, y Aron C. Wall. 2017. «Traversable wormholes via a double trace deformation». *Journal of High Energy Physics* 2017 (12). https://doi.org/10.1007/jhep12(2017)151.

Gell-Mann, Murray. 1962. «Symmetries of Baryons and Mesons». *Physical Review* 125 (3): 1067-84. https://doi.org/10.1103/physrev.125.1067.

Gerritsma, R., G. Kirchmair, F. Zähringer, E. Solano, R. Blatt, y C. F. Roos. 2010. «Quantum simulation of the Dirac equation». *Nature* 463: 68-71. https://doi.org/10.1038/nature08688.

Gidney, Craig. 2021. «Stim: a fast stabilizer circuit simulator». *Quantum* 5: 497. https://doi.org/10.22331/q-2021-07-06-497.

Giovannetti, Vittorio, Seth Lloyd, y Lorenzo Maccone. 2004. «Quantum-Enhanced Measurements: Beating the Standard Quantum Limit». *Science* 306 (5700): 1330-36. https://doi.org/10.1126/science.1104149.

Giovannetti, Vittorio, Seth Lloyd, y Lorenzo Maccone. 2006. «Quantum Metrology». *Physical Review Letters* 96 (1). https://doi.org/10.1103/physrevlett.96.010401.

Goos, F., y H. Hänchen. 1947. «Ein neuer und fundamentaler Versuch zur Totalreflexion». *Annalen der Physik* 436 (7-8): 333-46. https://doi.org/10.1002/andp.19474360704.

Gorini, Vittorio, Andrzej Kossakowski, y E. C. G. Sudarshan. 1976. «Completely positive dynamical semigroups of N-level systems». *Journal of Mathematical Physics* 17 (5): 821-25. https://doi.org/10.1063/1.522979.

Greenberger, Daniel M., y Allaine Yasin. 1988. «Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer». *Physics Letters A* 128 (8): 391-94. https://doi.org/10.1016/0375-9601(88)90114-4.

Grover, Lov K. 1996. «A fast quantum mechanical algorithm for database search». *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing - STOC '96*, 212-19. https://doi.org/10.1145/237814.237866.

Hadfield, Stuart, Zhihui Wang, Bryan O'Gorman, Eleanor G. Rieffel, Davide Venturelli, y Rupak Biswas. 2019. «From the Quantum Approximate Optimization Algorithm to a Quantum Alternating Operator Ansatz». *Algorithms* 12 (2): 34. https://doi.org/10.3390/a12020034.

Hahn, E. L. 1950. «Spin Echoes». *Physical Review* 80 (4): 580-94. https://doi.org/10.1103/physrev.80.580.

Hanson, R., L. P. Kouwenhoven, J. R. Petta, S. Tarucha, y L. M. K. Vandersypen. 2007. «Spins in few-electron quantum dots». *Reviews of Modern Physics* 79 (4): 1217-65. https://doi.org/10.1103/revmodphys.79.1217.

Havlíček, Vojtěch, Antonio D. Córcoles, Kristan Temme, et al. 2019. «Supervised learning with quantum-enhanced feature spaces». *Nature* 567 (7747): 209-12. https://doi.org/10.1038/s41586-019-0980-2.

Hawking, S. W. 1976. «Breakdown of predictability in gravitational collapse». *Physical Review D* 14 (10): 2460-73. https://doi.org/10.1103/physrevd.14.2460.

Hayden, Patrick, y John Preskill. 2007. «Black holes as mirrors: quantum information in random subsystems». *Journal of High Energy Physics* 2007 (09): 120-20. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/09/120.

Hein, M., J. Eisert, y H. J. Briegel. 2004. «Multiparty entanglement in graph states». *Physical Review A* 69 (6). https://doi.org/10.1103/physreva.69.062311.

Helstrom, Carl W. 1976. *Quantum Detection and Estimation Theory*. Academic Press.

Herrero-Collantes, Miguel, y Juan Carlos Garcia-Escartin. 2017. «Quantum random number generators». *Reviews of Modern Physics* 89 (1). https://doi.org/10.1103/revmodphys.89.015004.

Higgott, Oscar. 2022. «PyMatching: A Python Package for Decoding Quantum Codes with Minimum-Weight Perfect Matching». *ACM Transactions on Quantum Computing* 3 (3): 1-16. https://doi.org/10.1145/3505637.

Householder, Alston S. 1958. «Unitary Triangularization of a Nonsymmetric Matrix». *Journal of the ACM* 5 (4): 339-42. https://doi.org/10.1145/320941.320947.

Huang, Hsin-Yuan, Richard Kueng, y John Preskill. 2020. «Predicting many properties of a quantum system from very few measurements». *Nature Physics* 16 (10): 1050-57. https://doi.org/10.1038/s41567-020-0932-7.

Hubbard, J. 1963. «Electron correlations in narrow energy bands». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 276 (1365): 238-57. https://doi.org/10.1098/rspa.1963.0204.

Huelga, S. F., C. Macchiavello, T. Pellizzari, A. K. Ekert, M. B. Plenio, y J. I. Cirac. 1997. «Improvement of Frequency Standards with Quantum Entanglement». *Physical Review Letters* 79 (20): 3865-68. https://doi.org/10.1103/physrevlett.79.3865.

IQM Quantum Computers. 2026. *IQM Resonance: cloud access to IQM quantum computers*. Https://resonance.meetiqm.com.

Ivanov, D. A. 2001. «Non-Abelian Statistics of Half-Quantum Vortices in p -Wave Superconductors». *Physical Review Letters* 86 (2): 268-71. https://doi.org/10.1103/physrevlett.86.268.

Jafferis, Daniel, Alexander Zlokapa, Joseph D. Lykken, et al. 2022. «Traversa-

ble wormhole dynamics on a quantum processor». *Nature* 612 (7938): 51-55. https://doi.org/10.1038/s41586-022-05424-3.

Jarzynski, C. 1997. «Nonequilibrium Equality for Free Energy Differences». *Physical Review Letters* 78 (14): 2690-93. https://doi.org/10.1103/physrevlett.78.2690.

Javadi-Abhari, Ali, Matthew Treinish, Kevin Krsulich, et al. 2024. *Quantum computing with Qiskit*. arXiv. https://doi.org/10.48550/ARXIV.2405.08810.

Jeffreys, Harold. 1946. «An invariant form for the prior probability in estimation problems». *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 186 (1007): 453-61. https://doi.org/10.1098/rspa.1946.0056.

Johansson, J. R., P. D. Nation, y Franco Nori. 2012. «QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems». *Computer Physics Communications* 183 (8): 1760-72. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.02.021.

Jordan, P., y E. Wigner. 1928. «Über das Paulische Äquivalenzverbot». *Zeitschrift für Physik* 47 (9-10): 631-51. https://doi.org/10.1007/bf01331938.

Kanazawa, Naoki, Daniel J. Egger, Yael Ben-Haim, et al. 2023. «Qiskit Experiments: A Python package to characterize and calibrate quantum computers». *Journal of Open Source Software* 8 (84): 5329. https://doi.org/10.21105/joss.05329.

Kandala, Abhinav, Antonio Mezzacapo, Kristan Temme, et al. 2017. «Hardware-efficient variational quantum eigensolver for small molecules and quantum magnets». *Nature* 549 (7671): 242-46. https://doi.org/10.1038/nature23879.

Khaneja, Navin, y Steffen J. Glaser. 2001. «Cartan decomposition of SU(2n) and control of spin systems». *Chemical Physics* 267 (1-3): 11-23. https://doi.org/10.1016/s0301-0104(01)00318-4.

Kim, Jin-Sung, Alex McCaskey, Bettina Heim, Manish Modani, Sam Stanwyck, y Timothy Costa. 2023. «CUDA Quantum: The Platform for Integrated Quantum-Classical Computing». *2023 60th ACM/IEEE Design Automation Conference (DAC)*, 1-4. https://doi.org/10.1109/dac56929.2023.10247886.

Kitaev, A Yu. 2001. «Unpaired Majorana fermions in quantum wires». *Physics-Uspekhi* 44 (10S): 131-36. https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10s/s29.

Kitaev, A. Yu. 1995. *Quantum measurements and the Abelian Stabilizer Problem*. arXiv. https://doi.org/10.48550/ARXIV.QUANT-PH/9511026.

Kitaev, A.Yu. 2003. «Fault-tolerant quantum computation by anyons». *Annals of Physics* 303 (1): 2-30. https://doi.org/10.1016/s0003-4916(02)00018-0.

Knill, E., R. Laflamme, y G. J. Milburn. 2001. «A scheme for efficient quantum computation with linear optics». *Nature* 409 (6816): 46-52. https://doi.org/10.1038/35051009.

Kobrin, Bryce, Thomas Schuster, y Norman Y. Yao. 2023. *Comment on "Traversable wormhole dynamics on a quantum processor"*. arXiv. https://doi.org/10.48550/ARXIV.2302.07897.

Konig, Robert, Renato Renner, y Christian Schaffner. 2009. «The Operational Meaning of Min- and Max-Entropy». *IEEE Transactions on Information Theory* 55 (9): 4337-47. https://doi.org/10.1109/tit.2009.2025545.

Krantz, P., M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson, y W. D. Oliver. 2019. «A quantum engineer's guide to superconducting qubits». *Applied Physics Reviews* 6 (2). https://doi.org/10.1063/1.5089550.

Landauer, R. 1957. «Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction». *IBM Journal of Research and Development* 1 (3): 223-31. https://doi.org/10.1147/rd.13.0223.

Landman, Jonas, Natansh Mathur, Yun Yvonna Li, et al. 2022. «Quantum Methods for Neural Networks and Application to Medical Image Classification». *Quantum* 6: 881. https://doi.org/10.22331/q-2022-12-22-881.

LaRose, Ryan, Andrea Mari, Sarah Kaiser, et al. 2022. «Mitiq: A software package for error mitigation on noisy quantum computers». *Quantum* 6: 774. https://doi.org/10.22331/q-2022-08-11-774.

Leung, Debbie W., M. A. Nielsen, Isaac L. Chuang, y Yoshihisa Yamamoto. 1997. «Approximate quantum error correction can lead to better codes». *Physical Review A* 56 (4): 2567-73. https://doi.org/10.1103/physreva.56.2567.

Levenberg, Kenneth. 1944. «A method for the solution of certain non-linear problems in least squares». *Quarterly of Applied Mathematics* 2 (2): 164-68. https://doi.org/10.1090/qam/10666.

Lindblad, G. 1976. «On the generators of quantum dynamical semigroups». *Com-*

munications in Mathematical Physics 48 (2): 119-30. https://doi.org/10.1007/bf01608499.

Lloyd, Seth. 1996. «Universal Quantum Simulators». *Science* 273 (5278): 1073-78. https://doi.org/10.1126/science.273.5278.1073.

Lloyd, Seth, Lorenzo Maccone, Raul Garcia-Patron, et al. 2011. «Closed Timelike Curves via Postselection: Theory and Experimental Test of Consistency». *Physical Review Letters* 106 (4). https://doi.org/10.1103/physrevlett.106.040403.

Lloyd, Seth, Masoud Mohseni, y Patrick Rebentrost. 2014. «Quantum principal component analysis». *Nature Physics* 10 (9): 631-33. https://doi.org/10.1038/nphys3029.

Low, Guang Hao, y Isaac L. Chuang. 2017. «Optimal Hamiltonian Simulation by Quantum Signal Processing». *Physical Review Letters* 118 (1). https://doi.org/10.1103/physrevlett.118.010501.

Ma, Xiongfeng, Xiao Yuan, Zhu Cao, Bing Qi, y Zhen Zhang. 2016. «Quantum random number generation». *npj Quantum Information* 2 (1). https://doi.org/10.1038/npjqi.2016.21.

Maassen, Hans, y J. B. M. Uffink. 1988. «Generalized entropic uncertainty relations». *Physical Review Letters* 60 (12): 1103-6. https://doi.org/10.1103/physrevlett.60.1103.

Magesan, Easwar, J. M. Gambetta, y Joseph Emerson. 2011. «Scalable and Robust Randomized Benchmarking of Quantum Processes». *Physical Review Letters* 106 (18). https://doi.org/10.1103/physrevlett.106.180504.

Majorana, Ettore. 1937. «Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone». *Il Nuovo Cimento* 14 (4): 171-84. https://doi.org/10.1007/bf02961314.

Maki, Ziro, Masami Nakagawa, y Shoichi Sakata. 1962. «Remarks on the Unified Model of Elementary Particles». *Progress of Theoretical Physics* 28 (5): 870-80. https://doi.org/10.1143/ptp.28.870.

Maldacena, J., y L. Susskind. 2013. «Cool horizons for entangled black holes». *Fortschritte der Physik* 61 (9): 781-811. https://doi.org/10.1002/prop.201300020.

Maldacena, Juan, Stephen H. Shenker, y Douglas Stanford. 2016. «A bound on chaos». *Journal of High Energy Physics* 2016 (8). https://doi.org/10.1007/jhep08(2016)106.

Maldacena, Juan, y Douglas Stanford. 2016. «Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model». *Physical Review D* 94 (10). https://doi.org/10.1103/physrevd.94.106002.

Maldacena, Juan, Douglas Stanford, y Zhenbin Yang. 2017. «Diving into traversable wormholes». *Fortschritte der Physik* 65 (5). https://doi.org/10.1002/prop.201700034.

Marquardt, Donald W. 1963. «An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters». *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 11 (2): 431-41. https://doi.org/10.1137/0111030.

Martyn, John M., Zane M. Rossi, Andrew K. Tan, y Isaac L. Chuang. 2021. «Grand Unification of Quantum Algorithms». *PRX Quantum* 2 (4). https://doi.org/10.1103/prxquantum.2.040203.

Matsuzaki, Yuichiro, Simon C. Benjamin, y Joseph Fitzsimons. 2011. «Magnetic field sensing beyond the standard quantum limit under the effect of decoherence». *Physical Review A* 84 (1). https://doi.org/10.1103/physreva.84.012103.

McArdle, Sam, Xiao Yuan, y Simon Benjamin. 2019. «Error-Mitigated Digital Quantum Simulation». *Physical Review Letters* 122 (18). https://doi.org/10.1103/physrevlett.122.180501.

McClean, Jarrod R., Sergio Boixo, Vadim N. Smelyanskiy, Ryan Babbush, y Hartmut Neven. 2018. «Barren plateaus in quantum neural network training landscapes». *Nature Communications* 9 (1). https://doi.org/10.1038/s41467-018-07090-4.

McLachlan, A. D. 1964. «A variational solution of the time-dependent Schrodinger equation». *Molecular Physics* 8 (1): 39-44. https://doi.org/10.1080/00268976400100041.

Meyer, David A., y Nolan R. Wallach. 2002. «Global entanglement in multiparticle systems». *Journal of Mathematical Physics* 43 (9): 4273-78. https://doi.org/10.1063/1.1497700.

Mezzadri, Francesco. 2006. *How to generate random matrices from the classical compact groups*. arXiv. https://doi.org/10.48550/ARXIV.MATH-PH/0609050.

Mikheyev, Stanislav P., y Alexei Yu. Smirnov. 1985. «Resonance amplification of oscillations in matter and spectroscopy of solar neutrinos». *Soviet Journal of Nuclear Physics* 42: 913-17.

Monteverde, Vicente Humberto. 2026a. «Fundamentación geométrica y dimensional del sistema qang». Manuscript.

Monteverde, Vicente Humberto. 2026b. *qang: the qang (qg) unit, the symmetry filter and their applications. Source code and research notes*. Https://github.com/Viny2030/qang.

Monteverde, Vicente Humberto. 2026c. *The Qang (qg): A Unified Angular-Probability Unit and Metric for Parametric Quantum Circuit Design*. https://doi.org/10.5281/ZENODO.22832150.

National Institute of Standards and Technology. 2024a. *Module-Lattice-Based Digital Signature Standard*. Federal Information Processing Standards Publication FIPS 204. National Institute of Standards; Technology (U.S.). https://doi.org/10.6028/nist.fips.204.

National Institute of Standards and Technology. 2024b. *Module-Lattice-Based Key-Encapsulation Mechanism Standard*. Federal Information Processing Standards Publication FIPS 203. National Institute of Standards; Technology (U.S.). https://doi.org/10.6028/nist.fips.203.

National Institute of Standards and Technology. 2024c. *Stateless Hash-Based Digital Signature Standard*. Federal Information Processing Standards Publication FIPS 205. National Institute of Standards; Technology (U.S.). https://doi.org/10.6028/nist.fips.205.

Navas, S., C. Amsler, T. Gutsche, et al. 2024. «Review of Particle Physics». *Physical Review D* 110 (3). https://doi.org/10.1103/physrevd.110.030001.

Nielsen, Michael A., y Isaac L. Chuang. 2010. *Quantum Computation and Quantum Information*. 10th anniversary. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511976667.

Nosek, Brian A., Charles R. Ebersole, Alexander C. DeHaven, y David T. Mellor. 2018. «The preregistration revolution». *Proceedings of the National Academy of Sciences* 115 (11): 2600-2606. https://doi.org/10.1073/pnas.1708274114.

O'Donnell, Kane, y Matt Visser. 2011. «Elementary analysis of the special relativistic combination of velocities, Wigner rotation and Thomas precession». *European Journal of Physics* 32 (4): 1033-47. https://doi.org/10.1088/0143-0807/32/4/016.

O'Malley, P. J. J., R. Babbush, I. D. Kivlichan, et al. 2016. «Scalable Quantum Si-

mulation of Molecular Energies». *Physical Review X* 6 (3). https://doi.org/10.1103/physrevx.6.031007.

Oganesyan, Vadim, y David A. Huse. 2007. «Localization of interacting fermions at high temperature». *Physical Review B* 75 (15). https://doi.org/10.1103/physrevb.75.155111.

Page, Don N. 1993. «Information in black hole radiation». *Physical Review Letters* 71 (23): 3743-46. https://doi.org/10.1103/physrevlett.71.3743.

Pancharatnam, S. 1956. «Generalized theory of interference, and its applications: Part I. Coherent pencils». *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Section A* 44 (5): 247-62. https://doi.org/10.1007/bf03046050.

Paszke, Adam, Sam Gross, Francisco Massa, et al. 2019. *PyTorch: An Imperative Style, High-Performance Deep Learning Library*. arXiv. https://doi.org/10.48550/ARXIV.1912.01703.

Pedregosa, Fabian, Gaël Varoquaux, Alexandre Gramfort, et al. 2011. «Scikit-learn: Machine Learning in Python». *Journal of Machine Learning Research* 12: 2825-30.

Peng, Tianyi, Aram W. Harrow, Maris Ozols, y Xiaodi Wu. 2020. «Simulating Large Quantum Circuits on a Small Quantum Computer». *Physical Review Letters* 125 (15). https://doi.org/10.1103/physrevlett.125.150504.

Peruzzo, Alberto, Jarrod McClean, Peter Shadbolt, et al. 2014. «A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor». *Nature Communications* 5 (1). https://doi.org/10.1038/ncomms5213.

Pfeuty, Pierre. 1970. «The one-dimensional Ising model with a transverse field». *Annals of Physics* 57 (1): 79-90. https://doi.org/10.1016/0003-4916(70)90270-8.

Pontecorvo, Bruno. 1968. «Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge». *Soviet Physics JETP* 26: 984-88.

Popper, Karl R. 1959. *The Logic of Scientific Discovery*. Hutchinson.

Provost, J. P., y G. Vallee. 1980. «Riemannian structure on manifolds of quantum states». *Communications in Mathematical Physics* 76 (3): 289-301. https://doi.org/10.1007/bf02193559.

Pusz, W., y S. L. Woronowicz. 1978. «Passive states and KMS states for general quantum systems». *Communications in Mathematical Physics* 58 (3): 273-90. https://doi.org/10.1007/bf01614224.

Puzzuoli, Daniel, Christopher J. Wood, Daniel J. Egger, Benjamin Rosand, y Kento Ueda. 2023. «Qiskit Dynamics: A Python package for simulating the time dynamics of quantum systems». *Journal of Open Source Software* 8 (90): 5853. https://doi.org/10.21105/joss.05853.

Ramsey, Norman F. 1950. «A Molecular Beam Resonance Method with Separated Oscillating Fields». *Physical Review* 78 (6): 695-99. https://doi.org/10.1103/physrev.78.695.

Rao, C. Radhakrishna. 1945. «Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters». *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* 37: 81-91.

Riesz, Frigyes. 1907. «Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables». *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 144: 1409-11.

Romero, Jonathan, Ryan Babbush, Jarrod R McClean, Cornelius Hempel, Peter J Love, y Alán Aspuru-Guzik. 2018. «Strategies for quantum computing molecular energies using the unitary coupled cluster ansatz». *Quantum Science and Technology* 4 (1): 014008. https://doi.org/10.1088/2058-9565/aad3e4.

Sachdev, Subir, y Jinwu Ye. 1993. «Gapless spin-fluid ground state in a random quantum Heisenberg magnet». *Physical Review Letters* 70 (21): 3339-42. https://doi.org/10.1103/physrevlett.70.3339.

Samuel, Joseph, y Rajendra Bhandari. 1988. «General Setting for Berry's Phase». *Physical Review Letters* 60 (23): 2339-42. https://doi.org/10.1103/physrevlett.60.2339.

Schechter, J., y J. W. F. Valle. 1980. «Neutrino masses in SU(2) ⊗ U(1) theories». *Physical Review D* 22 (9): 2227-35. https://doi.org/10.1103/physrevd.22.2227.

Schuld, Maria, y Nathan Killoran. 2019. «Quantum Machine Learning in Feature Hilbert Spaces». *Physical Review Letters* 122 (4). https://doi.org/10.1103/physrevlett.122.040504.

Shannon, C. E. 1948. «A Mathematical Theory of Communication». *Bell System Technical Journal* 27 (3): 379-423. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.

tb01338.x.

Shor, Peter W. 1995. «Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory». *Physical Review A* 52 (4): R2493-96. https://doi.org/10.1103/physreva.52.r2493.

Shor, Peter W. 1997. «Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer». *SIAM Journal on Computing* 26 (5): 1484-509. https://doi.org/10.1137/s0097539795293172.

Shor, Peter W., y John Preskill. 2000. «Simple Proof of Security of the BB84 Quantum Key Distribution Protocol». *Physical Review Letters* 85 (2): 441-44. https://doi.org/10.1103/physrevlett.85.441.

Simon, Daniel R. 1997. «On the Power of Quantum Computation». *SIAM Journal on Computing* 26 (5): 1474-83. https://doi.org/10.1137/s0097539796298637.

Singh, Vinit, Amandeep Singh Bhatia, Mandeep Kaur Saggi, Manas Sajjan, y Sabre Kais. 2026. «Quantum machine learning for complex systems: paradigms, applications, and challenges». *Academia Quantum* 3 (2). https://doi.org/10.20935/acadquant8243.

Sivarajah, Seyon, Silas Dilkes, Alexander Cowtan, Will Simmons, Alec Edgington, y Ross Duncan. 2020. «t|ket⟩: a retargetable compiler for NISQ devices». *Quantum Science and Technology* 6 (1): 014003. https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab8e92.

Stokes, George Gabriel. 1852. «On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources». *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 9: 399-416.

Stokes, James, Josh Izaac, Nathan Killoran, y Giuseppe Carleo. 2020. «Quantum Natural Gradient». *Quantum* 4: 269. https://doi.org/10.22331/q-2020-05-25-269.

Sun, Qiming, Timothy C. Berkelbach, Nick S. Blunt, et al. 2018. «PySCF: the Python-based simulations of chemistry framework». *WIREs Computational Molecular Science* 8 (1). https://doi.org/10.1002/wcms.1340.

Susskind, Leonard, Lárus Thorlacius, y John Uglum. 1993. «The stretched horizon and black hole complementarity». *Physical Review D* 48 (8): 3743-61. https://doi.org/10.1103/physrevd.48.3743.

Suzuki, Masuo. 1991. «General theory of fractal path integrals with applications to many-body theories and statistical physics». *Journal of Mathematical Physics* 32 (2): 400-407. https://doi.org/10.1063/1.529425.

Suzuki, Yohichi, Shumpei Uno, Rudy Raymond, Tomoki Tanaka, Tamiya Onodera, y Naoki Yamamoto. 2020. «Amplitude estimation without phase estimation». *Quantum Information Processing* 19 (2). https://doi.org/10.1007/s11128-019-2565-2.

Svetlichny, George. 2011. «Time Travel: Deutsch vs. Teleportation». *International Journal of Theoretical Physics* 50 (12): 3903-14. https://doi.org/10.1007/s10773-011-0973-x.

Swingle, Brian, Gregory Bentsen, Monika Schleier-Smith, y Patrick Hayden. 2016. «Measuring the scrambling of quantum information». *Physical Review A* 94 (4). https://doi.org/10.1103/physreva.94.040302.

Talkner, Peter, Eric Lutz, y Peter Hänggi. 2007. «Fluctuation theorems: Work is not an observable». *Physical Review E* 75 (5). https://doi.org/10.1103/physreve.75.050102.

Temme, Kristan, Sergey Bravyi, y Jay M. Gambetta. 2017. «Error Mitigation for Short-Depth Quantum Circuits». *Physical Review Letters* 119 (18). https://doi.org/10.1103/physrevlett.119.180509.

Thaller, Bernd. 1992. *The Dirac Equation*. Texts y Monographs en Physics. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02753-0.

Thomas, L. H. 1926. «The Motion of the Spinning Electron». *Nature* 117 (2945): 514-14. https://doi.org/10.1038/117514a0.

Tomamichel, Marco, Charles Ci Wen Lim, Nicolas Gisin, y Renato Renner. 2012. «Tight finite-key analysis for quantum cryptography». *Nature Communications* 3 (1). https://doi.org/10.1038/ncomms1631.

Trotter, H. F. 1959. «On the product of semi-groups of operators». *Proceedings of the American Mathematical Society* 10 (4): 545-51. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1959-0108732-6.

Unruh, W. G. 1976. «Notes on black-hole evaporation». *Physical Review D* 14 (4): 870-92. https://doi.org/10.1103/physrevd.14.870.

Wang, Samson, Enrico Fontana, M. Cerezo, et al. 2021. «Noise-induced barren

plateaus in variational quantum algorithms». *Nature Communications* 12 (1). https://doi.org/10.1038/s41467-021-27045-6.

Wigner, E. 1939. «On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group». *The Annals of Mathematics* 40 (1): 149. https://doi.org/10.2307/1968551.

Wilson, Edwin B. 1927. «Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference». *Journal of the American Statistical Association* 22 (158): 209-12. https://doi.org/10.1080/01621459.1927.10502953.

Wolfenstein, L. 1978. «Neutrino oscillations in matter». *Physical Review D* 17 (9): 2369-74. https://doi.org/10.1103/physrevd.17.2369.

Wootters, W. K. 1981. «Statistical distance and Hilbert space». *Physical Review D* 23 (2): 357-62. https://doi.org/10.1103/physrevd.23.357.

Wu, Yue, Shimon Kolkowitz, Shruti Puri, y Jeff D. Thompson. 2022. «Erasure conversion for fault-tolerant quantum computing in alkaline earth Rydberg atom arrays». *Nature Communications* 13 (1). https://doi.org/10.1038/s41467-022-32094-6.

Yaghoobianzadeh, Amir Mohammad, y Jawad A. Salehi. 2026. «Continuous-variable teleportation and entanglement distribution in quantum passive optical networks». *Academia Quantum* 3 (3). https://doi.org/10.20935/acadquant8460.

Yoshida, Beni, y Alexei Kitaev. 2017. *Efficient decoding for the Hayden-Preskill protocol*. arXiv. https://doi.org/10.48550/ARXIV.1710.03363.

Yuan, Xiao, Suguru Endo, Qi Zhao, Ying Li, y Simon C. Benjamin. 2019. «Theory of variational quantum simulation». *Quantum* 3: 191. https://doi.org/10.22331/q-2019-10-07-191.

Żukowski, M., A. Zeilinger, M. A. Horne, y A. K. Ekert. 1993. «“Event-ready-detectors” Bell experiment via entanglement swapping». *Physical Review Letters* 71 (26): 4287-90. https://doi.org/10.1103/physrevlett.71.4287.

A Catálogo de las 15 compuertas fundamentales en representación qg

Este apéndice reúne la acción de las compuertas de `qang.formulation` sobre las lecturas qg. Una compuerta U transforma cada lectura de Pauli por conjugación,

$$qg'_P = qg_{U^\dagger P U},$$

así que alcanza con decir en qué se convierte cada lectura local. Las tablas no están escritas a mano: las genera `tools/make_appendices.py` a partir de `formulation.gate_table`, `is_clifford`, `conserves_weight` y `gate_radius_class`. Si el código cambia, se regeneran. En las cadenas de Pauli, la letra de la izquierda es el qubit 0, que es el control de CX y de CZ, los dos controles de Toffoli y el control de Fredkin.

Por qué son 15. El módulo define 16 matrices: seis fijas de un qubit, cuatro paramétricas y seis de varios qubits. $R_Z(\varphi)$ y la fase $P(\varphi)$ difieren sólo en una fase global, $P(\varphi) = e^{i\varphi/2} R_Z(\varphi)$, así que actúan igual sobre todas las lecturas y en qg cuentan como una.

A.1. Compuertas fijas de un qubit

Tabla A.1: Compuertas fijas de un qubit.

compuerta	qg'_X	qg'_Y	qg'_Z	desde $\lvert 0\rangle$ (m-qg)	Clifford	conserva el peso
X	qg_{X}	$-qg_{\mathrm{Y}}$	$-qg_{\mathrm{Z}}$	-1000,0	sí	no
Y	$-qg_{\mathrm{X}}$	qg_{Y}	$-qg_{\mathrm{Z}}$	-1000,0	sí	no
Z	$-qg_{\mathrm{X}}$	$-qg_{\mathrm{Y}}$	qg_{Z}	+1000,0	sí	sí
H	qg_{Z}	$-qg_{\mathrm{Y}}$	qg_{X}	+0,0	sí	no
S	$-qg_{\mathrm{Y}}$	qg_{X}	qg_{Z}	+1000,0	sí	sí

compuerta	qg'_X	qg'_Y	qg'_Z	desde $\lvert 0\rangle$ (m-qg)	Clifford	conserva el peso
T	$\frac{1}{\sqrt{2}}qg_{\mathrm{X}} - \frac{1}{\sqrt{2}}qg_{\mathrm{Y}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}qg_{\mathrm{X}} + \frac{1}{\sqrt{2}}qg_{\mathrm{Y}}$	qg_{Z}	+1000,0	no	sí

Las compuertas de Clifford permutan las lecturas con signo, y T las mezcla. Las diagonales (Z, S, T) dejan quieta qg_Z: no mueven poblaciones, sólo la fase, que se lee en qg_X y qg_Y. Conservar el peso es lo que permite usar el filtro de los capítulos 21 y 22.

A.2. Compuertas paramétricas

Tabla A.2: Compuertas paramétricas; el script comprueba cada coeficiente con $\theta = 0{,}7$.

compuerta	qg'_X	qg'_Y	qg'_Z	desde $\lvert 0\rangle$
$R_X(\theta)$	qg_X	$\cos\theta\, qg_Y - \sin\theta\, qg_Z$	$\sin\theta\, qg_Y + \cos\theta\, qg_Z$	$m = 1000\cos\theta$
$R_Y(\theta)$	$\cos\theta\, qg_X + \sin\theta\, qg_Z$	qg_Y	$-\sin\theta\, qg_X + \cos\theta\, qg_Z$	$m = 1000\cos\theta$
$R_Z(\varphi)$, $P(\varphi)$	$\cos\varphi\, qg_X - \sin\varphi\, qg_Y$	$\sin\varphi\, qg_X + \cos\varphi\, qg_Y$	qg_Z	$m = +1000$

Desde $\lvert 0\rangle$, $R_X(\theta)$ y $R_Y(\theta)$ son la ecuación de probabilidad del capítulo 1: el ángulo de la compuerta es el ángulo qang y la lectura es $m = 1000\cos\theta$. R_Z y P no cambian la lectura en Z. Ninguna rotación alrededor de X o de Y conserva el peso: mueve poblaciones entre $\lvert 0\rangle$ y $\lvert 1\rangle$. Por eso las capas que se usan con el filtro son de rotaciones de Givens (RBS) entre pares, no de rotaciones de un qubit.

En la escala angular qga del capítulo 1 (Sección 1.4), con 1000 qga por vuelta, el ángulo de una compuerta se escribe sin factores π: $\theta = 2\pi\,\theta_{qga}/1000$ y, desde $\lvert 0\rangle$, $m = 1000\cos(2\pi\,\theta_{qga}/1000)$. Así $R_X(500\text{ qga})$ es X salvo una fase global y lee -1000 m-qg, $R_Y(250\text{ qga})$ deja el qubit en el ecuador ($m = 0$) y $R_Z(\varphi)$ gira la fase φ_{qga} milésimas de vuelta. El script comprueba los dos primeros.

A.3. Compuertas de varios qubits

Tabla A.3: Compuertas de varios qubits: la transformación de las lecturas Z locales (las de X e Y están en `gate_table`).

compuerta	qubits	qué pasa con cada qg_Z local	Clifford	conserva el peso	radio	déficit máximo
CX	2	$qg_{\mathrm{ZI}} \to qg_{\mathrm{ZI}}$; $qg_{\mathrm{IZ}} \to qg_{\mathrm{ZZ}}$	sí	no	entrelaza	1
CZ	2	$qg_{\mathrm{ZI}} \to qg_{\mathrm{ZI}}$; $qg_{\mathrm{IZ}} \to qg_{\mathrm{IZ}}$	sí	sí	entrelaza	1
SWAP	2	$qg_{\mathrm{ZI}} \to qg_{\mathrm{IZ}}$; $qg_{\mathrm{IZ}} \to qg_{\mathrm{ZI}}$	sí	sí	permuta	0
iSWAP	2	$qg_{\mathrm{ZI}} \to qg_{\mathrm{IZ}}$; $qg_{\mathrm{IZ}} \to qg_{\mathrm{ZI}}$	sí	sí	entrelaza	1
Toffoli	3	$qg_{\mathrm{ZII}} \to qg_{\mathrm{ZII}}$; $qg_{\mathrm{IZI}} \to qg_{\mathrm{IZI}}$; $qg_{\mathrm{IIZ}} \to \frac{1}{2}qg_{\mathrm{IIZ}} + \frac{1}{2}qg_{\mathrm{IZZ}} + \frac{1}{2}qg_{\mathrm{ZIZ}} - \frac{1}{2}qg_{\mathrm{ZZZ}}$	no	no	entrelaza	1

compuerta	qubits	qué pasa con cada qg_Z local	Clifford	conserva el peso	radio	déficit máximo
Fredkin	3	$qg_{\mathrm{ZII}} \to qg_{\mathrm{ZII}}$; $qg_{\mathrm{IZI}} \to \frac{1}{2}qg_{\mathrm{IIZ}} + \frac{1}{2}qg_{\mathrm{IZI}} - \frac{1}{2}qg_{\mathrm{ZIZ}} + \frac{1}{2}qg_{\mathrm{ZZI}}$; $qg_{\mathrm{IIZ}} \to \frac{1}{2}qg_{\mathrm{IIZ}} + \frac{1}{2}qg_{\mathrm{IZI}} + \frac{1}{2}qg_{\mathrm{ZIZ}} - \frac{1}{2}qg_{\mathrm{ZZI}}$	no	sí	entrelaza	1

- **Radio.** "Conserva": todo radio local queda en 1 con entradas producto puras. "Permuta": los radios se intercambian (SWAP). "Entrelaza": alguna entrada producto termina con déficit $1 - r_q^2 > 0$. El déficit máximo, 1, lleva un qubit al centro de la esfera (capítulo 5).
- **Sobre estados de la base**, ninguna de estas compuertas crea déficit: actúan como permutaciones clásicas.
- **Conservan el peso** CZ, SWAP, iSWAP y Fredkin. CX y Toffoli no, porque cambian el bit objetivo. Un circuito armado sólo con las primeras tiene un sector de peso fijo y admite el filtro qg.
- Toffoli y Fredkin no son de Clifford: una lectura local pasa a ser una mezcla de cuatro cadenas con coeficientes $\pm\frac{1}{2}$.

B Fórmulas de transición, matrices de Gell-Mann y polinomios de Chebyshev

Este apéndice junta en un lugar las fórmulas cerradas que usan los capítulos 2 y 3: la compuerta universal y las reflexiones escritas en $q = qg_Z$, la probabilidad de transición, la generalización de qg_Z a qudits con las matrices de Gell-Mann diagonales y la trayectoria de Grover como polinomio de Chebyshev (notas, §37 y §166). No hay resultados nuevos. Lo que agrega es la comprobación: `tools/make_appendices.py` evalúa cada fórmula de `qang.algebra` contra el álgebra lineal directa en 2000 estados al azar y escribe acá el error máximo. Si una fórmula estuviera mal, el script se detiene.

B.1. Fórmulas de un qubit

Con $q = qg_Z = \cos\theta$ vale $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{(1+q)/2}$ y $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{(1-q)/2}$. El estado puro de sesgo polar q y azimut φ es

$$|\psi(q,\varphi)\rangle = \sqrt{\tfrac{1+q}{2}}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sqrt{\tfrac{1-q}{2}}\,|1\rangle, \qquad \vec{r} = (\sqrt{1-q^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-q^2}\sin\varphi,\ q).$$

En la escala angular qga del capítulo 1 (Sección 1.4), con $\theta = 2\pi\,\theta_{qga}/1000$, el sesgo es $q = \cos(2\pi\,\theta_{qga}/1000)$ y las amplitudes son $\cos(\pi\,\theta_{qga}/1000)$ y $\sin(\pi\,\theta_{qga}/1000)$: las fórmulas de abajo no cambian, sólo la unidad del ángulo.

Las fórmulas son:

$$U_3^{qg}(q,\varphi,\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+q}{2}} & -e^{i\lambda}\sqrt{\frac{1-q}{2}} \\ e^{i\varphi}\sqrt{\frac{1-q}{2}} & e^{i(\varphi+\lambda)}\sqrt{\frac{1+q}{2}} \end{pmatrix}, \qquad \left|U_{ij}\right|^2 = \begin{pmatrix} \frac{1+q}{2} & \frac{1-q}{2} \\ \frac{1-q}{2} & \frac{1+q}{2} \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

$$I - 2|\psi\rangle\langle\psi| = -q\,Z - \sqrt{1-q^2}\,X, \qquad 2|\psi\rangle\langle\psi| - I = q\,Z + \sqrt{1-q^2}\,X \tag{B.2}$$

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 = \frac{1+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}{2} \xrightarrow{\varphi_1=\varphi_2} \frac{1+q_1q_2+\sqrt{(1-q_1^2)(1-q_2^2)}}{2} \tag{B.3}$$

Tabla B.1: Comprobación de las fórmulas en 2000 estados al azar.

fórmula	función de `qang.algebra`	comparada con	error máximo
compuerta universal	`u3_qang`	`UGate(arccos q, φ, λ)` de Qiskit	$1{,}7\cdot10^{-16}$
matriz de transición	`transition_matrix`	$\lvert U_{ij}\rvert^2$	$5{,}6\cdot10^{-16}$
Householder	`householder_qg`	$I-2\lvert\psi\rangle\langle\psi\rvert$	$1{,}2\cdot10^{-15}$
difusor de Grover	`grover_diffuser_qg`	$2\lvert\psi\rangle\langle\psi\rvert-I$	$1{,}2\cdot10^{-15}$
probabilidad de transición	`transition_probability`	$\lvert\langle\psi_1\rvert\psi_2\rangle\rvert^2$	$5{,}6\cdot10^{-16}$
misma, sobre un meridiano	(forma cerrada)	$\lvert\langle\psi_1\rvert\psi_2\rangle\rvert^2$	$6{,}7\cdot10^{-16}$

La matriz de transición es doblemente estocástica, racional en q y no depende de las fases: la probabilidad que deja una compuerta se lee sin trigonometría. Con $(q,\varphi,\lambda)=(1,0,0)$, $(-1,0,\pi)$, $(1,0,\pi)$ y $(0,0,\pi)$, Ecuación B.1 da exactamente I, X, Z y H; el script lo comprueba. El reflector y el difusor son el mismo operador con signo opuesto, y los dos son combinaciones lineales de Z y X con coeficientes q y $\sqrt{1-q^2}$ (capítulo 3).

B.2. Matrices de Gell-Mann diagonales

Un qudit de d niveles tiene d^2-1 generadores de $\mathfrak{su}(d)$, las matrices de Gell-Mann generalizadas. Sólo $d-1$ son diagonales: forman la subálgebra de Cartan y son las únicas que se leen midiendo en la base computacional. Son

$$\lambda_k = \sqrt{\tfrac{2}{k(k+1)}}\,\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k},-k,0,\dots,0), \qquad k=1,\dots,d-1, \qquad \mathrm{Tr}(\lambda_j\lambda_k)=2\delta_{jk}, \tag{B.4}$$

y sus valores esperados son lineales en las poblaciones p y las determinan:

$$\langle \lambda_k \rangle = \sum_i p_i \, (\lambda_k)_{ii}, \qquad p = \frac{1}{d} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d-1} \langle \lambda_k \rangle \, \mathrm{diag}(\lambda_k). \tag{B.5}$$

Tabla B.2: Las matrices diagonales hasta $d = 4$, generadas por `cartan_generators`.

d	k	λ_k
2	1	$\mathrm{diag}(1, -1)$
3	1	$\mathrm{diag}(1, -1, 0)$
3	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{diag}(1, 1, -2)$
4	1	$\mathrm{diag}(1, -1, 0, 0)$
4	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{diag}(1, 1, -2, 0)$
4	3	$\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{diag}(1, 1, 1, -3)$

Para $d = 2$ la única es $\lambda_1 = Z$ y su valor es qg_Z. Para $d = 3$ son las λ_3 y λ_8 de Gell-Mann. El script recupera las poblaciones desde los $d - 1$ valores para $d = 2, \ldots, 6$, 200 distribuciones al azar cada una, con error máximo $2{,}2 \cdot 10^{-16}$. Un ejemplo: el qutrit con $p = (0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}2)$ lee $\langle \lambda_3 \rangle = 0{,}2000$ y $\langle \lambda_8 \rangle = 0{,}2309$.

Esto es una definición y una identidad. Si leer más niveles le da a qang alguna ventaja se preguntó en §70 para la fuga, y no se encontró ninguna (capítulo 2).

B.3. Polinomios de Chebyshev y la trayectoria de Grover

Con amplitud $a = \sin^2 t$ y la bandera bueno/malo leída como un qubit, $qg_0 = 1 - 2a = \cos 2t$. Cada iteración de Grover suma $2t$ al ángulo, así que tras k iteraciones

$$qg_k = T_{2k+1}(qg_0), \qquad T_m(\cos x) = \cos mx, \tag{B.6}$$

con T_m el polinomio de Chebyshev de primera especie. Como $T_m' = m\,U_{m-1}$ y $1 - T_m^2 = (1 - q^2)\,U_{m-1}^2$, la información de Fisher de un disparo a profundidad m es

$$F_m(qg_0) = \frac{m^2}{1 - qg_0^2}, \tag{B.7}$$

el factor m^2 sobre la información de profundidad 1, igual en todo el recorrido. Es la forma qg del conocido $4m^2$ para el ángulo (Suzuki et al. 2020).

Tabla B.3: Los primeros polinomios de la trayectoria. Con $a = 0{,}1$, $qg_0 = 0{,}8$; el éxito es -1000 m-qg.

k	$m = 2k+1$	$T_m(q)$	F_m/F_1	qg_k con $a = 0{,}1$ (m-qg)
0	1	q	1	+800,0
1	3	$4q^3 - 3q$	9	-352,0
2	5	$16q^5 - 20q^3 + 5q$	25	-997,1
3	7	$64q^7 - 112q^5 + 56q^3 - 7q$	49	-206,4
4	9	$256q^9 - 576q^7 + 432q^5 - 120q^3 + 9q$	81	+881,5

El script aplica el difusor de Ecuación B.2 y el oráculo Z a 200 estados iniciales al azar, hasta $k = 5$, y encuentra Ecuación B.6 con error máximo $1{,}7 \cdot 10^{-15}$. Comprueba Ecuación B.7 por diferencias finitas para $m = 1, \dots, 9$, con error relativo máximo $1{,}7 \cdot 10^{-10}$. Lo práctico de §37 está en el capítulo 3: el ruido tiene que entrar en la verosimilitud, y la ventaja de la estimación de amplitud termina cerca de la profundidad $1/p$.

Notas bibliográficas

Las matrices son las de Gell-Mann (1962). El reflector es el de Householder (1958); la búsqueda de Grover, Grover (1996); la estimación de amplitud, Brassard et al. (2002), y su versión por máxima verosimilitud, Suzuki et al. (2020). La probabilidad de transición es la distancia de Wootters (1981). Las notas numeradas (§) y el script de este apéndice están en el repositorio (Monteverde 2026b).

C Protocolo de calibración por eco e inversión en sectores de Hamming (§105–§108)

El capítulo 22 explica por qué hace falta el eco: el filtro qg descarta los disparos que salieron del sector, pero no ve los errores que mueven una excitación de un qubit a otro sin cambiar el peso. Este apéndice da el protocolo paso a paso, lo que cuesta, un ejemplo exacto generado por `tools/make_appendices.py` con las funciones de `qang.sectors`, y el registro de las cuatro corridas pre-registradas de las notas.

C.1. El protocolo

1. **Sector.** n qubits y peso w: el sector tiene $D = \binom{n}{w}$ estados de la base, $|e_1\rangle, \ldots, |e_D\rangle$ (`sector_states`).
2. **Ecos.** Para cada j: preparar $|e_j\rangle$ con compuertas X, aplicar la red W y después $W^\dagger$, y medir en Z. Sin errores el circuito vuelve a $|e_j\rangle$. Las notas usan 4000 disparos por eco.
3. **Matriz.** Filtrar cada eco al sector (`filter_distribution`). Su distribución sobre los D estados es la columna j de M, con $M_{ij} = P(\text{se mide } e_i \mid \text{se preparó } e_j)$ (`echo_transfer_matrix`).
4. **Raíz.** El circuito que se quiere leer tiene la mitad de las compuertas del eco, así que se corrige con $A = M^{1/2}$: la raíz principal, real, no negativa y normalizada por columnas (`matrix_power_stochastic`).
5. **Desmezcla.** Filtrar la distribución del circuito, f, y resolver $Ax = f$ con $x \geq 0$ por mínimos cuadrados no negativos; normalizar x (`unmix_sector`).
6. **Lectura.** Cada qubit lee $m_Z(q) = 1000\,(1 - 2p_q)$ con las poblaciones de x.
7. **Antes de usarlo.** Simular sin ruido con los mismos disparos para conocer el error de muestreo. El eco ayuda cuando el error filtrado está bien por encima de ese nivel, y no cuando ya es casi todo ruido de disparos (§108).

C.2. Costo

Tabla C.1: Un eco por estado del sector; la matriz se mide una vez por red, no por entrada.

qubits	peso	estados del sector D	circuitos de eco	disparos de eco (4000 c/u)	usado en
5	1	5	5	20 000	§105, §106, §108
5	2	10	10	40 000	§107
8	1	8	8	32 000	—
8	2	28	28	112 000	§115

El costo crece como $\binom{n}{w}$, no como 2^n: es lo que hace practicable la inversión. En peso 2 con 8 qubits son 28 circuitos; una matriz de confusión de lectura completa en 8 qubits necesitaría 256.

C.3. Un ejemplo exacto

El script arma un canal dentro del sector K en 5 qubits y peso 1, con 0,90 de probabilidad de quedarse en el qubit correcto, y una pérdida T1 de 15 % de los disparos hacia $|00000\rangle$, que lee $+1000$ m-qg en todos los qubits. El eco aplica K dos veces, así que $M = K^2$ (diagonal media 0,81), y la raíz principal recupera K exactamente. Es la suposición detrás de $M^{1/2}$: que la vuelta tenga el mismo error que la ida. En §105 el M completo fue mejor en Forte-1, así que no siempre se cumple.

Tabla C.2: Sin ruido de disparos. El filtro quita la pérdida; $M^{1/2}$ deshace K; M entero corrige de más y queda cerca del filtro solo.

lectura	error medio de qg_Z (m-qg)
sin qang	71,9
filtro qg	37,5
filtro y eco, $M^{1/2}$	$< 10^{-12}$
filtro y eco, M	36,7

Por qué mínimos cuadrados no negativos y no la inversa. Con 1000 disparos por corrida, en 37 de 300 corridas la inversa directa $A^{-1}f$ da alguna población negativa, que no es una probabilidad. La solución no negativa nunca lo hace. El error medio de qg_Z es casi el mismo: 21,6 m-qg con la inversa y 21,5 m-qg con la solución no negativa. Lo que se gana es que el resultado siempre es una distribución, no exactitud; por eso la mitigación de lectura usual también restringe la solución al símplex.

C.4. Las cuatro corridas pre-registradas

Tabla C.3: Las corridas de las notas, en modelos de ruido de tres dispositivos de IBM y dos de IonQ.

§	predicciones (commit)	cumplidas	resultado
§105	C1–C4 (`052752d`)	4 de 4	peso 1, 5 qubits, cinco dispositivos simulados: el eco quita 38–47 % del error que deja el filtro; filtro y eco, 6–7 veces más exactos que la lectura cruda
§106	L1–L4 (`fa8eda6`)	4 de 4	el clasificador de peso 1, 189 entradas: el error del valor de decisión baja 43–56 %; decisiones distintas del modelo sin ruido, 15 → 7 → 3
§107	W1–W4 (`4d83029`)	4 de 4	peso 2, matriz de 10 × 10: el eco quita 37–43 % del error de qg_Z y 39–48 % del de qg_{ZZ}

§	predicciones (commit)	cumplidas	resultado
§108	M1–M4 (`4ae2674`)	0 de 4	entradas de margen estrecho: el filtro baja las decisiones invertidas de 47 a 17 y el eco no agrega nada (19)

En total, 12 de 16 predicciones cumplidas. El script comprueba que cada commit citado existe y que en él las notas todavía no tenían la sección: las cuatro anterioridades son consistentes (apéndice E). Los números de la tabla vienen de las notas; los scripts de `examples/` que nombra cada sección los reproducen, pero tardan horas y este apéndice no los corre.

La falla de §108 es la regla del paso 7. En ese modelo el valor de decisión se dispersa unos 0,22 por los disparos solos, y con el filtro el error ya era 0,26–0,35: quedaba poco sesgo dentro del sector, e invertir la matriz sólo agregó varianza. En §106 el error filtrado era 0,47–0,87, casi todo sesgo, y el eco lo redujo a la mitad.

Notas bibliográficas

El eco es el de Hahn (1950); la mitigación de errores de lectura por inversión de una matriz de confusión, Bravyi et al. (2021). El filtro de sector es la verificación de simetría de Bonet-Monroig et al. (2018). Las notas numeradas (§) y los scripts están en el repositorio (Monteverde 2026b).

D Referencia rápida de la API de qang 0.14.0

Esta es la lista de todos los módulos del paquete `qang` en la versión 0.14.0, con sus nombres públicos: los de `__all__` o, si el módulo no lo define, las funciones y clases públicas que declara. La genera `tools/make_appendices.py` importando cada módulo, así que la lista es la del código y no una copia. La firma y la documentación de cada nombre están en `help(qang.<módulo>.<nombre>)`.

- `import qang` sólo necesita NumPy. Los módulos de SDK (`qiskit_gate`, `cirq_gate`, `pennylane_gate`, `ibm`, `qiskit_ml`, `qec`, `circuits`, `algorithms`) y los de `qang.integrations` importan su librería cuando se los usa.
- No hay módulo `crypto`: lo criptográfico del libro está en los ejemplos (capítulos 16–18). `qang.iqm` necesita `iqm-client`, que fija su propia versión de Qiskit: va en un entorno aparte (`qang[iqm]`).
- La columna “nombres” da la cantidad de nombres públicos, y la lista completa sigue a la tabla.

Tabla D.1: Los módulos de qang 0.14.0.

módulo	qué hace	nombres
`algebra`	Álgebra cerrada en qg: la compuerta universal, reflexiones y probabilidades de transición; subálgebra de Cartan (§166).	9
`algorithms`	Algoritmos de libro de texto en Qiskit: teleportación, codificación superdensa, Grover.	9
`angular`	Los cuatro números cuánticos de un electrón en qg (§155).	17

módulo	qué hace	nombres
`ansatze`	Ansätze variacionales reutilizables, incluidos los de capa qg.	4
`channels`	Canales de un qubit como mapas afines del vector qg (§162).	7
`circuits`	Constructores de circuitos (Bell, GHZ, W, grafo, Dicke) y sus lecturas.	14
`cirq_gate`	qg como compuertas nativas de Cirq.	5
`clock_comparison`	Fase diferencial entre dos relojes y el corrimiento gravitatorio.	5
`complementarity`	Dualidad onda–partícula e incertidumbre entrópica en qg.	8
`core`	La unidad qang (qg) y la clase `Qang`.	2
`fisher`	Información de Fisher, reglas de desplazamiento y gradiente natural en qg (§159).	14
`formulation`	Las 15 compuertas y los 14 algoritmos en lenguaje qg; el radio local (apéndice A, capítulo 5).	48
`geometric`	Fase geométrica (Berry, Pancharatnam) en unidades qg.	8
`gradients`	La singularidad de coordenadas en los polos y sus regularizaciones.	17
`ibm`	Lecturas qg en IBM Runtime: pase de preservación del peso, corrección de lectura, cadenas, ZNE (§137).	30

módulo	qué hace	nombres
`integrations`	qang dentro de otras librerías: un submódulo por librería (capítulo 35).	12
`interop`	Lecturas qg de los resultados de cualquier SDK con un solo orden de qubits (§130).	10
`iqm`	Lecturas qg en IQM: lectura desde los polos o el perfil de errores, filtro, elección de cadena (capítulo 31).	7
`kernels`	Núcleos cuánticos con el filtro qg (§161).	6
`knitting`	Costo de muestreo del corte de circuitos.	4
`mixed`	La unidad qang para estados mixtos y POVMs.	11
`multiqubit`	La unidad qang para registros de varios qubits: marginales, entropías, correlaciones.	14
`neutrino`	Oscilaciones de sabor de neutrinos en qg (§151; capítulos 9–11).	38
`pennylane_gate`	qg como operaciones nativas de PennyLane, diferenciables; lectura filtrada.	6
`phase`	La unidad de fase diferida qg_Φ.	2
`polarization`	Luz polarizada en unidades qg: Stokes, Jones, Mueller (§83; capítulo 6).	17
`postselection`	Teleportación con posselección: bucles temporales y decodificación de agujeros negros (capítulos 14–15).	8

módulo	qué hace	nombres
`probability`	La ecuación de probabilidad qang y el mili-qang (§167; capítulo 1).	13
`proportions`	El ángulo qang como transformación arcoseno de una proporción.	9
`pulse_area`	Área de pulso de compuertas fraccionarias: la regla del área mínima (§160).	6
`qec`	El código de bit-flip de 3 qubits con síndromes leídos en qg.	6
`qga`	La escala angular qga: 1000 qga por vuelta; conversiones a radianes, p_0 y m-qg, Fisher y fase de Berry en qga (capítulo 1).	15
`qiskit_gate`	qg como compuerta nativa de Qiskit.	5
`qiskit_ml`	La QNN de peso dentro de qiskit-machine-learning (§140).	4
`qml`	Redes neuronales cuánticas que conservan el peso, con y sin filtro (§75–§80; capítulo 20).	4
`qpon`	Teleportación por una red óptica pasiva, variables discretas (§157; capítulos 12–13).	17
`qsp`	Procesamiento cuántico de señales en qg (§134).	8
`sectors`	Herramientas de sectores conservados para el filtro qg y el eco (§20, §60, §66, §68; apéndice C).	9

módulo	qué hace	nombres
`statistics`	Propagación de errores entre probabilidad y ángulo, estimadores e intervalos.	25
`transformations`	Transformaciones cerradas entre estados parametrizados en qang.	1
`varqte`	Evolución variacional en tiempo real (McLachlan) con ansatz que conserva el peso (§162).	6

D.1. Nombres públicos por módulo

- **algebra**: u3_qang, transition_matrix, householder_qg, grover_diffuser_qg, qg_vector, transition_probability, cartan_generators, cartan_values, populations_from_cartan
- **algorithms**: teleportation_circuit, teleportation_output_fidelity, superdense_coding_circuit, decode_superdense_coding, grover_oracle, grover_diffusion, grover_optimal_iterations, grover_circuit, grover_success_probability
- **angular**: m_from_weight, weight_from_m, m_distribution, qg_z_spin, qg_s_spin, coherent_m_distribution, qang_angle_of_eigenstate, vector_model_angle, transverse_spread, dicke_state, p_orbital, spin_operators, shell_quantum_numbers, shell_register_qubits, shell_l_spectrum, j_squared_from_swaps, l_from_j_squared
- **ansatze**: single_excitation_ansatz, hardware_efficient_ansatz, qg_ry_layer, hardware_efficient_ansatz_qg
- **channels**: apply_kraus, bloch_affine, qg_after, amplitude_damping, phase_damping, depolarizing, thermal_relaxation
- **circuits**: qg_z_profile_of_circuit, joint_qg_s_of_circuit, bell_circuit, ghz_circuit, w_circuit, graph_state_circuit, linear_cluster_state_circuit, dicke_state_circuit, ghz_qg_z_profile, ghz_joint_qg_s, w_qg_z_profile, graph_state_qg_z_profile, graph_state_joint_qg_s, dicke_qg_z_profile
- **cirq_gate**: rqang_gate, full_rqang_gate, signed_rqang_gate, rqang_symbol, append_qang
- **clock_comparison**: differential_phase_from_c, ellipse_estimate, moment_estimate, redshift_phase, simulate_pairs

- **complementarity**: predictability, visibility, duality_sum, von_neumann_entropy_bits, entropic_sum, entropic_bound, duality_from_counts, entropic_sum_from_counts
- **core**: qg_s_from_qg_z, Qang
- **fisher**: fisher_theta, fisher_qg, cramer_rao_qg, shift_gradient, indistinguishable_pair, ansatz_states, ansatz_state, tfim_hamiltonian, energy, gradient, full_metric, block_metric, y_basis_circuit, block_metric_from_counts
- **formulation**: kron, pauli, rx, ry, rz, phase, clean, conjugate, conserves_weight, z_parity, single_qg_z, hadamard_n, phase_oracle_output, simon_output, grover_state, grover_qg_z_prediction, qft_matrix, local_qg, kickback_control, counting_qg_x, order_finding_output, purity_from_qg, walk_register_mean, qg_values, state_from_qg, apply_gate, gate_table, is_clifford, born_p0, deutsch_jozsa_is_constant, bernstein_vazirani_secret, simon_nonzero_parities, grover_marked_from_signs, count_from_qg_x, hhl_readout, energy_from_qg, maxcut_from_qg, product_kernel, radius2, radius_profile, radius_deficit, sphere_area, meyer_wallach, gate_radius_class, weight_sector_radius, hadamard_test_radius, algorithm_radii, direction_from_qg
- **geometric**: state_from_bloch, bloch_from_state, pancharatnam_phase, solid_angle, berry_phase_from_solid_angle, cone_phase_turns, curvature_flux, geometric_phase_qg
- **gradients**: jacobian, inverse_jacobian_raw, inverse_jacobian_clipped, inverse_jacobian_tikhonov, pole_damping_factor, qfi_qg, natural_gradient_step_qg, toy_vqe_energy, toy_vqe_grad_theta, GDHistory, run_gradient_descent, benchmark, MultiGDHistory, multi_param_gradient_descent, signed_theta, signed_qg_step, signed_natural_qg_step
- **ibm**: WeightPreservationCheck, measured_physical_qubits, readout_errors, readout_inverse_distribution, ibm_qg, estimator_qg, predict_kept_fraction, linear_chains, best_chain, best_layout, plan_shots, fold_two_qubit_gates, zne_qg, qnn_template, qnn_parameter_values, run_qnn, unary_loader, unary_orthogonal, pca_rotation, unary_spectrum, xy_trotter, xy_exact_occupations, occupations, xxz_trotter, xxz_exact_occupations, unary_overlap_circuit, swap_test_circuit, overlap_fidelity, swap_test_fidelity, add_static_zz
- **interop**: canonical_counts, qg_z_profile, weight_filter, filtered_qg_z_profile, joint_qg_s, joint_qg_s_se, sampler_qg, qg_z_observables, filtered_observables, estimator_filtered_qg
- **iqm**: check_weight, readout_errors, pole_circuits, readout_from_poles, iqm_qg, predict_kept_fraction, best_chain
- **kernels**: unary_embedding, exact_kernel, kernel_from_counts, normalize_gram, alignment, kernel_qang_angle
- **knitting**: pauli_rotation_cut_gamma, controlled_rotation_cut_gamma, cut_sampling_overhead, total_sampling_overhead
- **mixed**: density_from_statevector, mix, is_valid_density_matrix, qg_z_density, purity, von_neumann_entropy, standard_z_povm, is_valid_povm, povm_outcome_probabiliti

qg_s_povm, trine_povm

- **multiqubit**: product_state, bell_state, ghz_state, partial_trace, per_qubit_qg_z, marginal_qg_s, marginal_von_neumann_entropy, joint_qg_s, shannon_entropy_plugin_bits, shannon_entropy_miller_madow_bits, joint_qg_s_from_counts, qg_correlation, mean_qg_z, mean_qg_z_from_counts
- **neutrino**: phase, two_flavour_probability, two_flavour_qg_z, two_flavour_qang_angle, mixing_angle_from_maximum, mixing_angle_std, two_flavour_circuit, pmns, three_flavour_probabilities, three_flavour_circuit, cp_asymmetry, matter_potential, matter_probabilities, matter_trotter_circuit, first_maximum_energy, occupation_profile, collective_mass_hamiltonian, collective_exact, mass_sector_probabilities, collective_trotter_circuit, solar_core_potential, solar_matter_angle, solar_pee_from_p2, solar_pee_adiabatic, solar_slab_edges, solar_slab_unitaries, solar_p2, solar_p2_exact, solar_circuit, pmns_majorana, majorana_invisible, masses, m_bb, majorana_circuit, sterile_angles, sterile_mixing, sterile_probabilities, sterile_circuit
- **pennylane_gate**: rqang, full_rqang, append_qang, qg_z_from_probs, kept_fraction, filtered_qg_z
- **phase**: QangPhi, anchor_value
- **polarization**: stokes_to_qg, qg_to_stokes, degree_of_polarization, purity_from_stokes, jones_to_stokes, jones_to_qg, mueller_from_jones, ptm_from_mueller, mueller_from_ptm, rotator, linear_polarizer, wave_plate, half_wave_plate, quarter_wave_plate, depolarizer, malus_intensity, qg_from_counts
- **postselection**: pctc_success, pctc_controlled_qg_z, pctc_circuit, pctc_from_counts, is_scrambler, find_scrambler, yk_decoder_circuit, yk_from_counts
- **probability**: readings_from_p0, milliqang_from_p0, p0_from_milliqang, theta_from_milliqang, milliqang_from_theta, angle_per_milliqang, pole_angle, shot_noise_milliqang, shots_for_resolution, pulse_error_milliqang, statistical_angle, Reading, analyze
- **proportions**: theta_from_proportion, proportion_from_theta, arcsine, anscombe_theta, theta_variance, proportion_interval, cohens_h, compare_proportions, z_value
- **pulse_area**: minimal_area_angle, rx_qg_z_random_amplitude, rx_qg_z_systematic_amplitu
  qg_sensitivity, minimal_area_circuit, area
- **qec**: encode_bit_flip, extract_syndrome, syndrome_from_qg_z, decode_syndrome, apply_correction, decode_bit_flip
- **qga**: QGA_PER_TURN, MILLI_QGA_PER_QGA, FISHER_PER_QGA2, radians_from_qga, qga_from_radians, degrees_from_qga, qga_from_degrees, p0_from_qga, qga_from_p0, milliqang_from_qga, qga_from_milliqang, azimuth_qga, angle_sigma_qga, fubini_study_metric_qga, cone_phase_qga
- **qiskit_gate**: RQangGate, FullRQangGate, SignedRQangGate, append_qang, ap-

pend_rqang_parameter
- **qiskit_ml**: loader_inputs, qang_sampler_qnn, qg_features, QangQNNClassifier
- **qml**: WeightQNN, MultiClassQNN, kept_fraction, compare_qang
- **qpon**: fibre_transmission, link, heralding_probability, singlet_fraction, average_fidelity, optimal_angle, optimal_fidelity, optimal_qg_z, resource_angle_from_qg_z, teleport_circuit, fidelity_from_counts, fidelity_from_correlators, resource_circuit, correlator_from_counts, dual_rail_teleport_circuit, dual_rail_fidelity_from_counts, dual_rail_fidelities
- **qsp**: signal_from_qg, qg_of_signal, wqsp_unitary, wqsp_poly, hadamard_test_p0, sample_hadamard_test, fit_phases, wqsp_ops
- **sectors**: hamming_weights, filter_distribution, reweight_sectors, sector_exposure, SectorExposurePass, sector_states, echo_transfer_matrix, matrix_power_stochastic, unmix_sector
- **statistics**: p0_from_theta, var_qg_z_shot_noise, std_qg_z_shot_noise, propagated_theta_variance, propagated_theta_std, confidence_interval_theta, BootstrapResult, empirical_theta_std, beta_cdf, beta_ppf, QgEstimate, bayes_qg_estimate, wilson_qg_estimate, delta_qg_estimate, qg_estimate, propagated_theta_variance_mixed, theta_qcrb_variance, qg_covariance, delta_method_variance, register_witness_variance, qg_s_from_qg_z_interval, qg_s_estimate, qg2_unbiased, radius2_estimate, direction_estimate
- **transformations**: transition_probability_qang
- **varqte**: n_params, ansatz, mclachlan_rhs, evolve, xxz_matrix, occupations_from_counts

D.2. qang.integrations

Cada submódulo importa sólo su librería (capítulo 35); el extra de `pip` va entre paréntesis.

- **integrations.mitiq** (qang[mitiq]): qg_z, filtered_qg_z, qg_executor, execute_with_filter_zne, filter_rule
- **integrations.qiskit_experiments** (qang[experiments]): HeraldedReadout, HeraldedReadoutAnalysis, heralded_closed_form, t_eff_from_qg
- **integrations.qiskit_dynamics** (qang[dynamics]): rabi_qg, area_error_qg
- **integrations.qutip** (qang[qutip]): qg_readings, filtered_qg_z, mesolve_qg, t1_collapse
- **integrations.stim** (qang[stim]): detector_qg, observable_qg, measurement_qg, decoded_logical_qg

- **integrations.sklearn** (qang[sklearn]): WeightQNNClassifier, MultiClassQNNClassifier
- **integrations.jax** (qang[jax]): qg_from_p0, theta_from_qg, milliqang, qg_z_from_probs, filtered_qg_z, pole_damped_update
- **integrations.torch** (qang[torch]): WeightQNNTorch, unary_state
- **integrations.qibo** (qang[qibo]): rqang, canonical_counts, qg_readout
- **integrations.pytket** (qang[pytket]): rqang, qg_readout, statevector_qg
- **integrations.braket** (qang[braket]): rqang, run_qg
- **integrations.cudaq** (qang[cudaq]): rqang, canonical_counts, qg_readout

E Registro de falsación: las predicciones que el repositorio permite comprobar

El plan del libro anunciaba aquí un recuento completo de §1–§164. El capítulo 28 explica por qué no se hizo: las secciones anteriores a §71 casi no usan preregistro, y muchas posteriores dejan sus veredictos sólo en prosa, con redacciones distintas. Este apéndice lista lo que se puede comprobar con código. Lo genera `tools/make_appendices.py` con las mismas funciones que la figura del capítulo 28 (`tools/make_cap28_figures.py`), así que sus totales son los del capítulo.

E.1. Declaración de falsación

- **Las definiciones y las identidades no se falsan con experimentos.** La unidad qg, el mili-qang, la ecuación de probabilidad y las fórmulas de los apéndices A y B se demuestran o se comprueban a precisión de máquina en `tests/`. Si una falla, es un error de código, no un resultado.
- **Las afirmaciones empíricas sí.** Cada una dice que una lectura con qang es más exacta, más barata o más estable que sin qang, y se fija con un umbral antes de correr. Una predicción fallada se publica con su número y no se reescribe.
- **Qué falsaría el programa entero.** Que las ventajas del capítulo 29 no se repitieran en hardware real con umbrales fijados antes. Hoy hay tres corridas en IQM Garnet, con 12 de 13 predicciones cumplidas, pero sólo una prueba una ventaja: §165, el filtro de peso en neutrinos. §168 y §170 prueban la escala y la lectura, no una ventaja. Es poco para decidir.

E.2. Veredictos guardados por el código

Cada archivo de `examples/data/` con un diccionario `verdict` es una corrida cuyas predicciones juzgó el propio script. La columna § es la sección de las notas que nombra al script.

Tabla E.1: 34 corridas, 148 predicciones: 94 cumplidas (64 %) y 54 falladas.

corrida	§	cumplidas	falladas	cuáles fallaron
fisher_natural_gradient_qg	§158	4	1	G2
ibm_coherent_zz_qg	§145	0	3	X1, X2, X3
ibm_fleet_qg	§144	0	3	F1, F2, F3
ibm_layout_qg	§138	2	1	L1
ibm_pca_spectrum_qg	§146	4	0	—
ibm_qnn_layout_qg	§141	2	1	R3
ibm_qnn_qg	§139	2	1	Q2
ibm_runtime_qg	§137	3	0	—
ibm_shot_plan_qg	§143	1	1	P2
ibm_static_zz_qg	§150	2	2	Z2, Z3
ibm_swap_test_qg	§149	5	0	—
ibm_trotter_walk_qg	§147	5	1	W1
ibm_xxz_many_body_qg	§148	3	1	K1
ibm_zne_qg	§142	1	2	Z1, Z3
iqm_milliqang_qg_analysis	§168	3	1	M2
iqm_zitterbewegung_qg_analysis	§170	5	0	—
lih_lambda_filter_qg	§153	5	1	L4
neutrino_collective_qg	§154	0	7	C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7
neutrino_matter_qg	§152	4	1	M1
neutrino_ordering_majorana_sterile_qg	§163	5	1	O3
neutrino_oscillation_qg	§151	4	0	—
neutrino_solar_qg	§156	6	0	—
postselection_bh_blackhole_qg	§164	2	4	C1, C2, C3, H1
pulse_area_qg	§160	3	1	P4
qiskit_ml_qnn_qg	§140	3	0	—
qnn_ingate_dephasing	§133	2	2	D2, D3
qnn_torino_residual	§132	2	2	T2, T3
qpon_teleport_quasi_rail_qg	§158	1	7	A1, A2, A3, B1, B2, B3, B5
qpon_teleport_qg	§157	5	1	Q5
qsp_arcsine_fit	§134	2	2	Q2, Q4
quantum_kernel_qg	§161	2	3	K2, K3, K4
varqte_kraus_qg	§162	4	1	V1
wqsp_kan	§135	1	2	K1, K2
wqsp_kan_parity	§136	1	1	P2

corrida	§	cumplidas	falladas	cuáles fallaron
total		**94**	**54**	

E.3. Pre-registros por sha256

Cada `examples/data/*.prereg` guarda el sha256 de un script congelado. La anterioridad está comprobada si el hash coincide con el script en el commit que agregó el `.prereg` y ese commit es anterior al de los resultados.

Tabla E.2: 16 pre-registros: 8 comprobados en git, 8 sólo con la fecha del propio archivo.

pre-registro	§	coincide hoy	coincide en su commit	antes de los resultados	anterioridad
`fisher_natural_gradient_qg`	§159	no	sí	sí	comprobada
`iqm_milliqan_qg`	§168	no	sí	sí	comprobada
`iqm_neutrino_qg`	§165	no	sí	sí	comprobada
`iqm_zitterbewegung_qg`	§170	sí	sí	sí	comprobada
`lih_lambda_fisher_qg`	§153	no	sí	sí	comprobada
`neutrino_collective_qg`	§154	no	sí	sí	comprobada
`neutrino_mass_qg`	§152	no	no	no	sólo fecha propia
`neutrino_majorana_sterile_qg`	§163	no	no	no	sólo fecha propia
`neutrino_oscillation_qg`	§151	no	no	no	sólo fecha propia
`neutrino_solar_qg`	§156	no	no	no	sólo fecha propia
`postselection_bkc_blackhole_qg`	§164	no	no	no	sólo fecha propia
`pulse_area_qg`	§160	no	no	no	sólo fecha propia
`qpon_teleportation_rail_qg`	§158	no	sí	sí	comprobada
`qpon_teleportation_qg`	§157	no	sí	sí	comprobada
`quantum_kernel_qg`	§161	no	no	no	sólo fecha propia

pre-registro	§	coincide hoy	coincide en su commit	antes de los resultados	anterioridad
varqte_kraus_q	§162	no	no	no	sólo fecha propia

Que ninguno coincida hoy es lo esperable: después de la corrida se agregan los hallazgos al comentario inicial del script. En los que tienen sólo fecha propia, el `.prereg` y los resultados entraron en el mismo commit.

E.4. Pre-registros por commit

Cada “committed … (abcdef1)” de las notas: el commit existe y en él las notas todavía no tienen la sección.

Tabla E.3: 54 citas en 54 secciones, §71–§165: 54 consistentes.

§	commits	consistentes
§71	daf0b6f	1 de 1
§72	092580f	1 de 1
§73	e877a72	1 de 1
§74	68d8d00	1 de 1
§75	1a516b4	1 de 1
§76	8d32f92	1 de 1
§77	1450374	1 de 1
§78	e999d7f	1 de 1
§79	00520dc	1 de 1
§80	77700bd	1 de 1
§81	1f2da5c	1 de 1
§82	1f4f8ac	1 de 1
§85	d0191cb	1 de 1
§86	5239ad3	1 de 1
§87	1f33029	1 de 1
§88	0b266fe	1 de 1
§90	14fab61	1 de 1
§91	d292c7e	1 de 1
§92	7a3bdad	1 de 1
§93	52d5cb1	1 de 1
§94	ebd795b	1 de 1

§	commits	consistentes
§95	`505943d`	1 de 1
§96	`5648765`	1 de 1
§98	`4c11ff3`	1 de 1
§100	`517902b`	1 de 1
§101	`d4fcbaa`	1 de 1
§102	`6c0a1d7`	1 de 1
§103	`1b408dd`	1 de 1
§104	`22554eb`	1 de 1
§105	`052752d`	1 de 1
§106	`fa8eda6`	1 de 1
§107	`4d83029`	1 de 1
§108	`4ae2674`	1 de 1
§109	`9c06b36`	1 de 1
§110	`59f855a`	1 de 1
§111	`34760c3`	1 de 1
§112	`ea3fd3a`	1 de 1
§113	`d2dcd56`	1 de 1
§114	`d6e4f50`	1 de 1
§115	`12d12f0`	1 de 1
§117	`3c0fca9`	1 de 1
§118	`637e800`	1 de 1
§119	`d5d31e7`	1 de 1
§120	`fcfdf3b`	1 de 1
§121	`efba91a`	1 de 1
§122	`1bca045`	1 de 1
§123	`fc1e0ea`	1 de 1
§124	`b37b344`	1 de 1
§125	`b42cde2`	1 de 1
§126	`b2e92c4`	1 de 1
§127	`b2e92c4`	1 de 1
§128	`8a16974`	1 de 1
§129	`1a5507f`	1 de 1
§165	`a74c07c`	1 de 1

E.5. Lo que este registro no incluye

- **La línea de QML (§75–§123)** lleva su propia cuenta en el README: 176 predicciones juzgadas, 123 cumplidas y 53 falladas, con 4 más esperando la

corrida en hardware de IonQ (§116). Se superpone en parte con las tablas de arriba y no debe sumarse.

- **Los veredictos en prosa** ("Four passed; V1 failed") de las secciones que no guardan un diccionario. Están en las notas, sección por sección, pero contarlos exige leerlos uno a uno.
- **Las secciones anteriores a §71**, que casi no usan pre-registro: sus números son reproducibles, pero no tienen un umbral fijado antes.

Notas bibliográficas

El criterio de falsación es el de Popper (1959), y el pre-registro como práctica, Nosek et al. (2018). Las notas numeradas (§), los archivos de `examples/data/` y los scripts están en el repositorio (Monteverde 2026b).

F Fundamento de análisis funcional: Riesz–Fréchet

Este apéndice es conceptual y no agrega resultados. Es el apéndice A de las notas de investigación, que el capítulo 4 cita: explica por qué qg_Z es la lectura lineal canónica de un estado y por qué qg_S no puede serlo. Las tres comprobaciones numéricas las hace `tools/make_appendices.py`.

F.1. El marco

Para n qubits, los operadores sobre $\mathbb{C}^{2^n}$ forman un espacio de Hilbert de dimensión finita con el producto de Hilbert–Schmidt

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B),$$

y las matrices densidad viven en él.

F.2. El teorema

Representación de Riesz–Fréchet (Riesz 1907; Fréchet 1907). Todo funcional lineal continuo f sobre un espacio de Hilbert H es de la forma $f(x) = \langle y_f, x\rangle$ para un único $y_f \in H$. En dimensión finita la continuidad es automática y el teorema se reduce a álgebra lineal: con una base ortonormal $\{E_i\}$, $y_f = \sum_i \overline{f(E_i)}\, E_i$. Por eso es un fundamento y no un resultado.

F.3. Aplicación: qg_Z tiene representante

La lectura $\rho \mapsto qg_Z(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho\,\sigma_z)$ es lineal en ρ, así que tiene un único representante de Hilbert–Schmidt: σ_z en un qubit, y $\sigma_z^{(i)} \otimes I$ en el qubit i de un registro. Toda lectura lineal de un estado, sea un valor esperado, una población o un promedio por disparo como el XEB lineal, tiene esta forma. qg_Z es aquella cuyo representante es el observable Z.

El script lo comprueba en dos qubits con la base de Pauli normalizada, $E_P = P/2$. Reconstruye el representante de $\rho \mapsto \mathrm{Tr}(\rho\, Z \otimes I)$ y obtiene $Z \otimes I$ con error 0. Para una lectura de poblaciones con pesos al azar, $\rho \mapsto \sum_x w_x \langle x|\rho|x\rangle$, obtiene $\mathrm{diag}(w)$ con error $8{,}7 \cdot 10^{-18}$.

F.4. Lo que no tiene representante: qg_S

$qg_S(\rho) = H(\langle 0|\rho|0\rangle)$ es estrictamente cóncava en ρ, no lineal, así que ningún operador la representa. El ejemplo más corto: $|0\rangle\langle 0|$ y $|1\rangle\langle 1|$ tienen $qg_S = 0$ los dos, y su mezcla por mitades tiene $qg_S = 1$ bit; una lectura lineal daría el promedio, 0. Con qg_Z el promedio sí se cumple: $(+1 - 1)/2 = 0$.

El mismo hecho estructural está detrás de dos resultados de las notas:

- **§10.3 B:** las lecturas lineales tienen estimadores insesgados por promedio de disparos, y la entropía no (desigualdad de Jensen). La tabla da el sesgo exacto, por suma binomial, de los dos estimadores directos.
- **§7.1:** la identidad $qg_S = H\big((1 + qg_Z)/2\big)$ escribe la métrica no lineal como una función escalar fija de la lineal. qg_S no lleva información del estado más allá de la que ya extrae el representante de qg_Z.

Tabla F.1: El promedio de qg_Z es insesgado a precisión de máquina; la entropía de la frecuencia subestima siempre.

p_0	disparos N	sesgo del promedio de qg_Z	sesgo de $H(k/N)$ (bits)
0,5	10	0	-0,07650
0,5	100	0	-0,00725
0,5	1000	0	-0,00072
0,9	10	0	-0,08440
0,9	100	0	-0,00735
0,9	1000	0	-0,00072

F.5. Sobre el lema de Riesz (1918)

El lema del vector casi ortogonal sirve para mostrar que la bola unidad cerrada de un espacio normado de dimensión infinita no es compacta. En las dimensiones finitas de este libro es trivial, porque siempre existe un vector exactamente ortogonal. No cumple ningún papel en qang y no debería citarse como si lo cumpliera.

Notas bibliográficas

El teorema de representación es Riesz (1907) y Fréchet (1907). La entropía binaria es la de Shannon (1948). Las notas numeradas (§) y el script están en el repositorio (Monteverde 2026b).

G La energía relativista y la antimateria como lecturas qang

El capítulo 1 dejó como **propuesta sin verificar** la extensión de la escala qang a $E = mc^2$ y a la antimateria (Sección 1.4.1). Este apéndice la desarrolla con las ecuaciones de probabilidad del capítulo 1 y separa con cuidado lo que es exacto de lo que sigue siendo una lectura propuesta. El resultado central es exacto, aunque conocido: para una partícula libre de Dirac, **el valor esperado de la matriz** β **es** mc^2/E. Como β tiene autovalores ± 1, igual que σ_z, ese valor esperado es un qg_Z, y todo el capítulo 1 se le aplica: tiene probabilidad, ángulo qang, lectura en m-qg y barra de error. Todas las cifras salen de `tools/verify_apendice_g.py` (25 afirmaciones, todas pasan), y nada de lo que sigue es física nueva.

G.1. El ángulo relativista

Al dividir $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ por E^2 se obtiene una identidad pitagórica, que define un ángulo θ_r:

$$\cos\theta_r = \frac{mc^2}{E} = \frac{1}{\gamma}, \qquad \sin\theta_r = \frac{pc}{E} = \beta, \qquad \tan\theta_r = \beta\gamma = \frac{p}{mc}, \qquad E = \frac{mc^2}{\cos\theta_r}.$$

En reposo, $\theta_r = 0$ y la fórmula da $E = mc^2$. Cuando $\beta \to 1$, $\theta_r \to 90^\circ = 250$ qga y $E = pc$: es el límite de la luz, sin masa en reposo. En la escala angular del capítulo 1 (Sección 1.4), $E = mc^2/\cos(2\pi\,\theta_{r,qga}/1000)$. Tabla G.1 da algunos valores.

Tabla G.1: El ángulo relativista y la lectura $1000/\gamma$.

β	γ	θ_r	θ_r (qga)	$1000/\gamma$ (m-qg)	$T/mc^2 = \gamma - 1$
0	1	0°	0	+1000	0
0,5	1,155	30°	83,3	+866,0	0,155

β	γ	θ_r	θ_r (qga)	$1000/\gamma$ (m-qg)	$T/mc^2 = \gamma - 1$
0,6	1,25	$36{,}87^\circ$	102,4	$+800{,}0$	0,25
0,8	1,667	$53{,}13^\circ$	147,6	$+600{,}0$	0,667
0,99	7,089	$81{,}89^\circ$	227,5	$+141{,}1$	6,089
0,999	22,37	$87{,}44^\circ$	242,9	$+44{,}7$	21,37

El ángulo θ_r no es la rapidez η ($\beta = \tanh\eta$): se relacionan por $\cos\theta_r = 1/\cosh\eta$, la función de Gudermann. Las rapideces se suman en impulsos colineales; los ángulos no. Dos impulsos de $0{,}6c$ dan $\beta = 0{,}8824$ y $\gamma = 2{,}125$, es decir, $\theta_r = 61{,}93^\circ = 172{,}0$ qga, no la suma $2 \times 102{,}4 = 204{,}8$ qga. La escala qga mide el ángulo, pero no lo vuelve aditivo.

G.2. $E = mc^2$ como una lectura: el valor esperado de β

En la ecuación de Dirac libre, $H = c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta\,mc^2$. Por el teorema de Hellmann–Feynman (Feynman 1939), derivar un autovalor respecto de un parámetro da el valor esperado de la derivada del hamiltoniano: $\partial E/\partial(mc^2) = \langle\beta\rangle$. Como $E = \pm\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$,

$$\boxed{\langle\beta\rangle = \frac{mc^2}{E} = \cos\theta_r}$$

en cada autoestado libre, con el signo de E. El script lo comprueba en 1200 autoestados al azar, de las dos ramas, con un error de $2\cdot10^{-15}$. La matriz β tiene autovalores ±1, así que $\langle\beta\rangle$ es un qg_Z. En la codificación habitual del bispinor en dos qubits es literalmente la Z del primero, $\beta = \sigma_z \otimes I$, y Qiskit lo confirma: el qg_Z de ese qubit es mc^2/E. Se llamará a ese qubit el **qubit de** β. La ecuación de probabilidad del capítulo 1 le asigna sus cuatro lecturas:

$$p_0 = \frac{E + mc^2}{2E} = \cos^2\frac{\theta_r}{2}, \qquad p_1 = \frac{E - mc^2}{2E} = \frac{T}{2E}, \qquad m = 1000\,\frac{mc^2}{E} = \frac{1000}{\gamma}\ \text{m-qg}, \qquad \theta = \theta$$

Leída al revés, es una forma de escribir la energía: $E = mc^2/qg_Z = 1000\,mc^2/m$, y la energía cinética es $T = 2E\,p_1$. $E = mc^2$ **es el polo**: en reposo, $m = +1000$

m-qg, $p_1 = 0$, sin energía cinética. La luz está en el ecuador. Una partícula a $0{,}6c$ lee $+800$ m-qg, con $p_0 = 0{,}9$; a $0{,}99c$, $+141{,}1$ m-qg.

Dos precisiones. Primero, la lectura no depende de la representación: $\langle\beta\rangle = \bar{\psi}\psi/\psi^\dagger\psi$ es un escalar de Lorentz dividido por una densidad, y en la representación quiral, donde β no es diagonal, da lo mismo (comprobado). Lo que sí depende de la representación es la imagen de p_0 y p_1 como pesos de las componentes "grande" y "pequeña" del espinor, que sólo vale en la representación estándar de Dirac. Segundo, el qubit de β es una lectura de una **simulación** de la ecuación de Dirac, como las de iones atrapados (Gerritsma et al. 2010): en un laboratorio de partículas nadie mide β disparo a disparo.

G.3. La antimateria: la rama negativa y la conjugación de carga

En la rama de energía negativa, la misma identidad da $\langle\beta\rangle = -mc^2/|E|$: la lectura es $m = -1000/\gamma$, el espejo de la de la rama positiva a través del ecuador. Dirac (1928) encontró esas soluciones, y la reinterpretación de Feynman (Feynman 1949) las lee como antipartículas de energía positiva que viajan hacia el futuro. En qang, la rama de la solución se ve en el **signo de la lectura** del qubit de β: hemisferio norte, la rama positiva; hemisferio sur, la negativa.

La simetría que pasa de una rama a la otra es la **conjugación de carga** C, $\psi \mapsto i\gamma^2\psi^*$. El script comprueba que C lleva un autoestado de energía $+E$ de $H(\vec{p})$ a uno de energía $-E$ de $H(-\vec{p})$, que **invierte la lectura**, $m \mapsto -m$, y que la paridad P y la inversión temporal T la conservan. Por lo tanto CPT también la invierte. En el ángulo del qubit de β, C es la reflexión $\theta_{qga} \mapsto 500 - \theta_{qga}$; para la lectura da lo mismo que media vuelta, $\theta_{qga} \mapsto \theta_{qga} + 500$.

Esto rescata, corregido, lo que el documento fuente afirmaba: que la simetría CPT «induce una traslación angular de 500 qg». Hay un núcleo correcto: la conjugación de carga, y con ella CPT, actúa sobre la lectura de β como media vuelta en qga. Pero no es una traslación del estado: es una reflexión de su lectura. Y es cierto, como dice el documento, que la densidad de probabilidad no cambia: $i\gamma^2$ es unitaria, así que $\psi^{c\dagger}\psi^c = \psi^\dagger\psi$ punto a punto (comprobado).

G.4. Las probabilidades del documento fuente

El documento fuente usa otro par de probabilidades, $P_{\text{reposo}} = (mc^2/E)^2$ y $P_{\text{cinético}} = \beta^2$. También suman 1, por la identidad pitagórica, y también son un qubit, pero con el **doble de ángulo**: $R_y(2\theta_r)|0\rangle$ da $p_0 = 1/\gamma^2$ y $p_1 = \beta^2$ (QuTiP). Se lo llamará **qubit de Pitágoras**. Ese factor 2 es el que el capítulo 1 señaló como error. No es que una de las dos fórmulas esté mal; son dos qubits distintos para la misma partícula:

Tabla G.2: Dos qubits qang para la misma partícula.

	ángulo	p_0	p_1	a $0{,}6c$
qubit de β (valor esperado de β)	θ_r	$(E+mc^2)/2E$	$T/2E$	$p_0 = 0{,}9$; 102,4 qga
qubit de Pitágoras (partición de E^2)	$2\theta_r$	$(mc^2/E)^2$	β^2	$p_0 = 0{,}64$; 204,8 qga

Sólo el primero es el valor esperado de un observable de la ecuación de Dirac. El segundo es una partición de E^2 en dos cuadrados: una probabilidad bien definida, pero sin un observable detrás.

G.5. Medir el ángulo relativista con disparos

Si el ángulo θ_r se codifica en un qubit, con $R_y(\theta_r)$ y $qg_Z = 1/\gamma$, el capítulo 1 dice cuánto cuesta leerlo. Como el ángulo qang es la transformación arcoseno, $\sigma(\theta_r) = 1/\sqrt{N}$ para cualquier velocidad, es decir, $159{,}15/\sqrt{N}$ qga. La velocidad, $\beta = \sin\theta_r$, tiene entonces $\sigma(\beta) = 1/(\gamma\sqrt{N})$: se resuelve mejor cuanto más rápida es la partícula. Con 1000 disparos, el ángulo tiene 5,03 qga de incertidumbre en todo el rango, y a $0{,}99c$ la velocidad se resuelve a $0{,}0045$. El script lo comprueba muestreando con Qiskit a $0{,}3c$, $0{,}6c$ y $0{,}9c$.

G.6. La lectura de β en un chip real (§170)

En una dimensión y con impulso fijo, el hamiltoniano de Dirac es un solo qubit, $H = p\,X + m\,Z$, con $\beta = Z$. Así el qubit de β se puede preparar y leer en un qubit físico. Con $m = 1$ y $p = 0{,}75$ es $E = 1{,}25$, $v = 0{,}6c$, $\gamma = 1{,}25$ y $\theta_r = 102{,}4$ qga. Lo exacto es esto: el autoestado de energía positiva, $R_y(\theta_r)|0\rangle$, lee $+800$ m-qg en todo momento, y el de energía negativa lee -800. En cambio $|0\rangle$ mezcla las dos ramas, y su lectura oscila a la frecuencia $2E$ entre $+1000$ y $+280$ m-qg alrededor de $1000/\gamma^2 = +640$: es el *Zitterbewegung*, el temblor de Dirac. Ese promedio, $1000\,(mc^2/E)^2$, es el P_{reposo} del documento fuente (Sección G.4): la probabilidad del documento es el promedio temporal de la lectura de β.

Se corrió en IQM Garnet, en el qubit 0: 24 circuitos de 2000 disparos en un trabajo de 32 s, con la lectura corregida desde los polos ($e_0 = 0{,}0030$, $e_1 = 0{,}0265$). Las cinco predicciones quedaron fijadas antes de la corrida (sha256 del archivo subido al repositorio antes del trabajo; Capítulo 28). Llevan un margen sistemático de 60 m-qg, tomado de §168, donde R_y en ángulos intermedios leyó bajo.

Tabla G.3: La lectura de β en IQM Garnet (notas §170).

predicción	medido (m-qg, corregido)	previsto	veredicto
Z1: E_+ en $t = 0$	$+759{,}9 \pm 14{,}9$	$+800$	cumple ($z = -2{,}7$; también sin el margen)
Z2: E_- en $t = 0$; reflexión C	$-809{,}4 \pm 14{,}9$; $-49{,}5$	-800; 0	cumple (dentro de 3σ sin el margen)
Z3: E_+ no tiembla (rango en un período)	45,3	≤ 108	cumple
Z4: frecuencia ajustada	2,511	$2E = 2{,}5$ (± 5 %)	cumple (0,44 % de diferencia)
Z5: media; amplitud	625,6; 356,1	640; 360 (± 60)	cumple (14 y 4 m-qg de diferencia)

Las cinco predicciones se cumplen. En un chip real, el autoestado de Dirac lee $1000/\gamma$, la rama negativa lo refleja, y el *Zitterbewegung* aparece a la frecuencia $2E$, con la media $1000/\gamma^2$ y la amplitud previstas (Figura G.1). Z1 y Z5 discrimi-

naban de verdad. El qubit de Pitágoras habría leído $+640$ en Z1. Una media de $1000/\gamma$ habría dado $+800$ en Z5. Las dos quedan fuera de la tolerancia.

No salió limpio, y se dice. Las cuatro lecturas de E_+ quedan entre 26 y 71 m-qg por debajo de $+800$; la peor, en $t = T/2$, tiene $z = -4{,}5$ y no forma parte de ninguna predicción. Es la misma dirección que en §168. Los 16 puntos del *Zitterbewegung* se apartan 30 m-qg (rms) de la curva exacta, más que el ruido de disparo (χ^2 por grado de libertad 2,4), así que los errores de compuerta se ven, aunque no mueven ni la frecuencia ni la media. Como velocímetro, E_+ en $t = 0$ da $\gamma = 1{,}316$ (la verdadera es 1,25: +5 %) y E_- da 1,236 (-1 %). Es una sola corrida en un solo qubit. Falta repetirla en otro qubit y otro día, igual que §168.

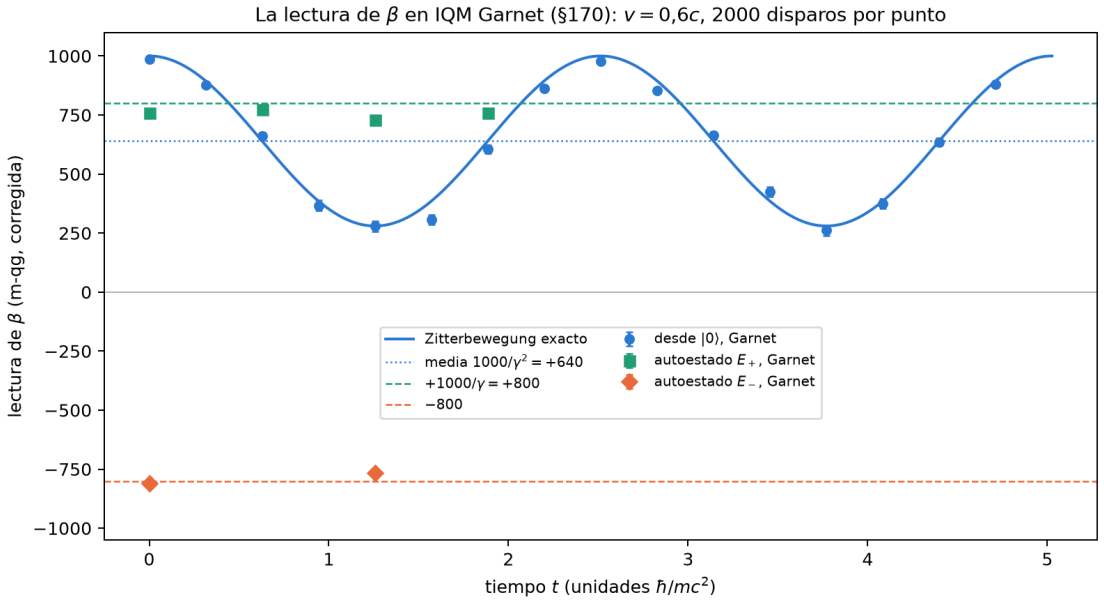


Figura G.1: La lectura de β en IQM Garnet (§170), con $v = 0{,}6c$ y 2000 disparos por punto. La curva es el *Zitterbewegung* exacto desde $|0\rangle$, y los círculos, lo medido. Los cuadrados son el autoestado E_+, que no tiembla y lee cerca de $+800$; los rombos, el autoestado E_-, su reflejo en -800.

G.7. Qué se afirma y qué no

- **Exacto y comprobado:** el ángulo relativista y sus identidades; $\langle\beta\rangle = mc^2/E$ con el signo de la rama (Hellmann–Feynman), independiente de la representación; sus cuatro lecturas qang ($p_1 = T/2E$, $m = 1000/\gamma$); C y

CPT invierten la lectura, y P y T la conservan; el qubit de Pitágoras; la barra de error del ángulo.

- **Comprobado en hardware (una corrida, §170):** en IQM Garnet, la lectura $1000/\gamma$ de un autoestado, su reflejo en la rama negativa y el *Zitterbewegung* a $2E$ con media $1000/\gamma^2$. Las cinco predicciones se cumplen, con un sesgo de compuerta de 26 a 71 m-qg que queda a la vista.
- **Conocido, no nuevo:** todo lo anterior es mecánica cuántica relativista de libro (Thaller 1992) escrita en la escala del capítulo 1. Lo que la escala agrega es la lectura: la energía en m-qg, el ángulo en qga y su ruido de disparo.
- **Lectura propuesta, sin verificar como física:** llamar «materia» y «antimateria» a los hemisferios del qubit de β. Es la rama de la solución de Dirac, no una probabilidad de que una partícula sea antimateria; una partícula libre de energía positiva lee siempre en el hemisferio norte.
- **No se adopta:** que CPT sea una traslación del estado en 500 qga, ni que $P_{\text{reposo}} = p_0$ del mismo ángulo. La versión correcta de las dos está arriba.

H Catálogo de submedidas qang

La unidad qang no reformula ninguna ley física. Cada submedida de este catálogo es una lectura de una probabilidad, o de unas pocas, y es igual a una magnitud que la física o la estadística ya tienen. Lo que una submedida puede aportar es una **decisión**: menos disparos, un pulso más corto, una compilación elegida antes de correr, una lectura que el ruido no sesga. El catálogo registra, para cada una, su definición, a qué equivale, qué decisión mejora y con qué evidencia, y la clasifica con uno de los estados de la Tabla H.1.

Las tablas se generan desde el registro `qang.measures` con `tools/make_apendice_h.py`, la misma fuente para las dos lenguas del libro. Una submedida nueva entra al catálogo como **sin verificar** y sólo cambia de estado con una prueba, de preferencia pre-registrada (capítulo 28).

Tabla H.1: Estados del catálogo.

estado	significado	submedidas
exacta	identidad exacta: nombra o re-escala algo; no se atribuye ganancia	18
ganancia medida	probada en simulación o análisis, con ganancia medida frente a la práctica usual	14
probada en hardware	probada en un dispositivo real	3
mixta	ganancia en algunos regímenes, ninguna o pérdida en otros	7
sin ganancia	probada: equivalente a la práctica usual	4
en contra	probada: peor que la práctica usual	2

estado	significado	submedidas
sin verificar	propuesta sin prueba: candidata a un experimento pre-registrado	3
no adoptada	propuesta descartada por errónea o sin respaldo	1

H.1. Lecturas base

Tabla H.2: Lecturas base.

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
qg_Z	$2p_0 - 1 = \langle\sigma_z\rangle = \cos\theta$	valor esperado de σ_z	coordenada de trabajo medible sin inversión	**exacta**	identidad; vale para estados mixtos	cap. 1, §7
m-qg	$m = 1000\, qg_Z$	$\langle\sigma_z\rangle$ por mil, lineal en p_0	presupuesta error de compuerta y ruido de disparo en una sola escala	**probada en hardware**	IQM Garnet: 1,64 m-qg por X, sobrerotaciones de 16–55 m-qg ocultas al modelo de lectura; M2 falló	cap. 1, §168

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
θ	$\arccos qg_Z$	transformación arcoseno de una proporción	barra de error $1/\sqrt{N}$ igual en todo el círculo	**exacta**	sumas binomiales exactas; asintótica (falla con $Np \approx 2{,}5$)	cap. 1, §125
qg_S	$H(p_0) = H\big((1+qg_Z)/2\big)$	entropía de Shannon del resultado	certificar aleatoriedad junto con la lectura media	**mixta**	sola se engaña bajo T1; el par con la lectura media no	caps. 1 y 26, §7, §51
qga	$1\,\text{vuelta} = 1000\ \text{qga}$	ángulo con otra unidad	escribir ángulos de compuerta sin factores π	**exacta**	conveniencia; no cambia gradientes ni mesetas	cap. 1
(qg_Z, s)	$s = \operatorname{sign}(qg_X)$	el signo del seno del ángulo	cruzar un polo durante una optimización	**ganancia medida**	H_2: con sólo qg_Z se queda en Hartree–Fock; con signo llega a la energía exacta	cap. 1, §65

H.2. Magnitudes derivadas

Tabla H.3: Magnitudes derivadas.

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
qg_{κ}	$1/[\ln 2\,(1-qg_Z^2)]$	información de Fisher sobre qg_Z, en bits	amortiguar el paso de un optimizador junto a los polos	**sin ganancia**	evita la divergencia del gradiente en q, pero es el descenso en θ: 103 pasos los dos (cap. 30); el banco de JAX lo repite	caps. 1, 23 y 30
qg_{SNR}	$\lvert qg_Z\rvert/\sqrt{1-qg_Z^2}$	señal a ruido de un disparo, $\lvert\cot\theta\rvert$	disparos para leer un signo: $(z/qg_{SNR})^2$	**exacta**	27 disparos a 60° para 3σ; binomial exacta: error < 1 %	caps. 1 y 3
qg_L	$\lvert\theta-\theta'\rvert/2$	ángulo de Bhattacharyya; Fubini–Study en un meridiano común	distancia entre estados desde dos histogramas en Z	**exacta**	con azimutes distintos es sólo una cota inferior	caps. 1 y 3

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
qg_{τ}	$\sqrt{1-r^2} = 2\sqrt{\det \rho}$	falta de pureza	ver el área de un pulso donde la lectura en m-qg no se corre	**exacta**	0,277 para $R_X(324^\circ)$ frente a 0,031 para $R_X(-36^\circ)$; necesita tres bases	caps. 1–3
κ_{qg}	$1000\,\lvert\cos\theta\rvert$	curvatura de la lectura respecto del ángulo	predecir el corri-miento por error de amplitud, $\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\kappa_{qg}$	**exacta**	QuTiP: coincide a segundo orden	caps. 1 y 2, §160
qFi	$4\pi^2 \cdot 10^{-6}$ qga^{-2}	información de Fisher del ángulo qang	resolución angular fija: $159{,}15/\sqrt{N}$ qga	**exacta**	no es una variedad plana: la esfera tiene cur-vatura 4	cap. 1
qHz	qga/s	frecuencia angular, $2\pi/1000$ rad/s	ninguna por ahora	**exacta**	unidad sin uso en el libro	cap. 1

H.3. Estados y registros

Tabla H.4: Estados y registros.

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
$1 - r^2$	$4p_0(1 - p_0)$ en peso definido	pureza local	medir la pureza con una base en lugar de tres	**ganancia medida**	vale sólo con peso de Hamming definido	cap. 5
$\arccos(qg_Z/r)$	qg_Z/r	ángulo polar de Bloch de un estado mixto	dirección de un estado con ruido	**mixta**	a favor con despolarizante; en contra con desfase puro	cap. 5, §45
$qg_{XX}, qg_{YY}, qg_{ZZ}$	$\langle \sigma_i \otimes \sigma_i \rangle$	correladores de Pauli	diagnosticar un par de Bell y predecir la teleportación sin teleportar	**ganancia medida**	3 configuraciones en vez de 9; 4–5 compuertas de dos qubits en vez de 10–11, error máximo 0,029	caps. 12 y 13
m_E	$\sqrt{1000^2 - n^2}$	información de Eve (Helstrom con purificación)	cuántas rondas de prueba hacen falta para certificar bits	**exacta**	la cuenta es estándar; la lectura la vuelve geométrica	cap. 18

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
$(1000 - m_r)/2000$	$m_r = 1000\,r$	energía del estado pasivo	saber cuánta energía nadie puede extraer	**exacta**	modesto: el reparto se lee de un vistazo	cap. 19
qg_Z, qg_X de síndromes	lecturas de los ancillas	la regla T_2/T_1	elegir y recalibrar un código corrector sin disparos de prueba	**ganancia medida**	6,4 % sobre el oráculo frente a 64–220 % de un código fijo; deriva 13,1 % frente a 20,4 %	cap. 26
γ	$1 + \frac{}{2\sqrt{1 - qg^2}}$	sobrecosto de cortar una compuerta	elegir qué compuertas cortar	**mixta**	hasta 2,9 veces frente a reglas ciegas al ángulo; ninguna frente a qiskit-addon-cutting	cap. 26
qg_Z en estados de grafo	$qg_Z = 0,\ qg_S = 1$	la lectura local en Z	detectar entrelazamiento con lecturas locales en Z	**sin ganancia**	no distingue un estado de grafo de un producto: el límite es de la base Z	cap. 30

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
qg de paridad	$(dqg)^2/(1-qg^2) = N^2$	información de Fisher cuántica de un GHZ	alcanzar la cota de Heisenberg con una lectura de paridad	**exacta**	la fórmula de un disparo del capítulo 1 alcanza la cota	cap. 34

H.4. Compuertas y compilación

Tabla H.5: Compuertas y compilación.

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
área mínima	θ mód 2π; R_{ZZ} de período π	representante más corto de la misma compuerta	compilar con menos área de pulso: menos error	**ganancia medida**	QAOA de 4 qubits: área 4,4× y error 4,1× menores; la predicción de 1,5× por R_{ZZ} falló (1,14×)	cap. 2, §160

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
exposición	población fuera del sector tras cada compuerta de dos qubits	cálculo sin ruido del circuito	elegir la compilación antes de gastar disparos	**ganancia medida**	correlación de rangos 0,80 con la fuga de T1; exposición nula quita ≥ 98 % del T1	cap. 2, §68
compuertas que conservan N	$[U, \sum_i Z_i] = 0$	compilación en el sector	compilar para que el filtro quite el T1	**mixta**	el filtro quita 99,5 % del T1 frente a 48,5 % con CNOT; ninguna en iones	cap. 24, §61
grilla en qg	pasos iguales en qg_Z	cuantización del control	cuantizar los ángulos de control	**mixta**	probabilidades $\pi/2$ veces mejores, 43 de 45 cargas; en contra para fidelidad junto a los polos	cap. 27

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
best_chain	cadena de qubits de mayor K predicho	elección de disposición con datos de calibración	elegir los qubits físicos antes de correr	**ganancia medida**	entre 6 y 17 puntos más de disparos conservados que la disposición por defecto (simulado)	cap. 32

H.5. Ruido y lectura

Tabla H.6: Ruido y lectura.

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
filtro de peso, K	$K = (1-\gamma)^{kd}$	post-selección en el sector de Hamming	leer, entrenar y derivar bajo T1 sin sesgo; costo en disparos conocido antes de correr	**probada en hardware**	IQM Resonance: error 0,0615 → 0,0386 (1,59×) con 88 % de los disparos; simulado: exacto a 10^{-12} m-qg; en contra con $K \le 0{,}14$ (2 de 12) y en LiH profundo (76,6 → 85,0 mHa)	caps. 20, 21, 23, 30 y 31, §112
eco, $M^{1/2}$	matriz de transferencia del eco	corrección de errores dentro del sector	quitar lo que el filtro no ve	**ganancia medida**	−27 a −62 % del error filtrado, con $\binom{n}{k}$ circuitos de eco más	cap. 22, §106

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
qg_{eq}, T_{ef}	lectura afín con heraldo	calibración de lectura con mediciones repetidas	calibrar la lectura sin confundir temperatura con error	**ganancia medida**	temperatura efectiva a 1 mK; evita un certificador inseguro y recupera 10–50 % de bits	caps. 18 y 27, §31
paso $\times\lvert\sin\theta\rvert$	$\theta - \eta\,\mathrm{máx}(\lvert\sin\theta\rvert, c_f)g$	región de confianza junto a los polos	entrenar con tasas agresivas sin ajuste	**ganancia medida**	2,3 a 13 veces más éxitos desde tasa 2; poco o nada con tasas seguras	cap. 23
costo local	$(1 - \overline{qg_Z})/2$	costo local de Cerezo et al.	evitar la meseta estéril de un costo global	**mixta**	470 veces más varianza de gradiente con 10 qubits y circuitos cortos; ninguna con circuitos profundos	cap. 23

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
ZNE de la lectura filtrada	extrapolación a ruido cero sobre qg_Z filtrado	post-selección y ZNE por separado (mitiq)	mitigar T1 y desfase juntos	**ganancia medida**	55,9 → 1,1 m-qg con T1 y desfase; con pocos disparos la ZNE no paga	caps. 21 y 35
par $(qg_S, \overline{qg_Z})$	entropía y lectura media del registro	XEB o HOP con simulación ideal	distinguir T1 de ruido unital sólo con conteos	**mixta**	0,88–0,91 frente a 0,70–0,76 con ruido fuerte; azar con ruido realista	caps. 27, 29 y 30

H.6. Lecturas de leyes físicas conocidas

Tabla H.7: Lecturas de leyes físicas conocidas.

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
$\langle\beta\rangle$	mc^2/E	valor esperado de la matriz de Dirac β	leer $E = mc^2$ y la conjugación de carga como un qg_Z	**probada en hardware**	exacta y conocida; la conjugación de carga invierte la lectura; corrida §170 en IQM Garnet	ap. G, §170
$\widehat{qg^2}$	cuadrados insesgados	corrección estándar de sesgo	comparar dos relojes con pocos disparos	**ganancia medida**	sesgo de +11,8 % a +0,9 % con 100 disparos	cap. 8
$\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ insesgado	cuadrados insesgados de Stokes	grado de polarización	estimar la polarización con pocos fotones	**ganancia medida**	el sesgo baja unas tres veces, sin desaparecer	cap. 6
$\arccos(m/l)$	$\langle J_z\rangle/l$	dirección de $\langle\mathbf{J}\rangle$	leer el momento angular como un qg_Z	**exacta**	el modelo vectorial $\arccos(m/\sqrt{l(l+1)})$ dibuja otra cosa	cap. 11
qg_Z de sabor	$1 - 2P_{\alpha\to\beta}$	probabilidad de oscilación	leer el ángulo de mezcla con barra de error fija	**exacta**	identidad sobre la fórmula de dos sabores	cap. 9

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
m_Z, m_X	lecturas del qubit cronológico	comparar matrices densidad	distinguir P-CTC de D-CTC con una lectura en Z	**ganancia medida**	P-CTC mueve m_Z, D-CTC no	cap. 14
$(1000 + m_P)(1000 + m_F)$	$= 10^6$	ley de Yoshida y Kitaev	juzgar un decodificador de agujero de gusano	**exacta**	la ley es conocida; la escala muestra que $m_P = -500$ no prueba nada	cap. 15
$N/2 + \sum_n qg_n/2$	$G/G_0 = \sum_n T_n$	fórmula de Landauer	leer conductancia y ruido de partición en una escala	**exacta**	conductancia $= qg$ medio, ruido $= qg^2$ medio; la barra de $\hat{\theta}$ es constante (0,985–1,009)	cap. 33
recta en artanh	$\operatorname{artanh} qg$	ajuste de Fermi	medir temperatura electrónica	**en contra**	sesgo de +2,9 % (ajuste de Fermi: −0,14 %)	cap. 33
$\theta/2 = \operatorname{gd}(r)$	función de Gudermann de la compresión r	$\tanh^2 r$, $\bar{n}$ y la entropía	leer la compresión como un ángulo qang	**exacta**	identidad nueva, exacta	cap. 34

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
$\theta = 2\pi\Phi/\Phi_0$	franjas de interferencia	fase de Aharonov–Bohm	estimar el flujo con barra de error pareja	**exacta**	desvío $1/2\pi\sqrt{N}$ constante; el signo pide otra lectura	cap. 34

H.7. Propuestas abiertas y descartadas

Tabla H.8: Propuestas abiertas y descartadas.

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
compilación por κ_{qg}	mínima curvatura de llegada	—	mitigar mesetas estériles	**sin verificar**	sin prueba	caps. 1 y 2
E_{total}	$\langle H\rangle + \lambda_\theta L(\theta) + \lambda_\varphi L(\varphi)$	—	regularizar un VQE	**sin verificar**	L y λ sin definir	cap. 1
$R(\theta,\varphi)$	$N[p_1 + \alpha\cos\varphi]$	—	modelar emisión desde la población excitada	**sin verificar**	N y α sin fijar; sin contraste con un modelo de emisión	cap. 1

submedida	definición	equivale a	decisión que mejora	estado	evidencia	dónde
500 qga CPT	$E_{_} \leftrightarrow$ desplazamiento de 500 qga	—	ubicar la antimateria en la escala	**no adoptada**	sin respaldo; la lectura correcta es la conjugación de carga sobre $\langle\beta\rangle$	cap. 1, ap. G
signos de $qg_{Z,i}$	sign $qg_{Z,i}$	histograma de cadenas de bits	leer el elemento marcado en una búsqueda con ruido	**en contra**	66 % frente a 91 % de la moda del histograma (5 qubits, 100 disparos)	cap. 3, §63
qg_{SNR}, qg_{κ} de parada	umbral sobre $\lvert qg_k\rvert$	la fórmula de k^*	cortar las iteraciones de Grover	**sin ganancia**	no distinguen si la bandera pasó el polo; cuestan una corrida por k	cap. 3
ciclos qg	traducción de ángulo a lectura en Wigner, Kitaev y OTOC	—	proteger estados o medir caos	**sin ganancia**	no protegen ni miden caos	cap. 34

H.8. Balance

De 52 submedidas, 18 son identidades exactas, 14 tienen una ganancia medida en simulación o análisis, 3 se probaron en un dispositivo real (con un resultado mixto en el caso del mili-qang), 7 son mixtas, 4 resultaron equivalentes a la práctica usual, 2 quedaron por debajo de ella, 3 están sin verificar y 1 no se adoptó. Las ganancias no vienen de la unidad sino de las decisiones que la lectura permite tomar antes de gastar recursos: elegir el representante de menor área, la compilación de menor exposición, el código según dos lecturas, o leer sólo el sector de peso que el T1 no contamina. Las submedidas sin verificar son la lista de experimentos pendientes; el catálogo las mantiene a la vista para que no se citen como resultados.

H.9. En código

```
from qang import measures

measures.summary()                        # submedidas por estado
measures.by_status("sin_verificar")       # los experimentos pendientes
m = measures.find("min_area")
m.decision[0], m.evidence[0]          # la decisión que mejora y la evidencia, en español
measures.resolve(m)                # qang.pulse_area.minimal_area_circuit
```